МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра программной инженерии

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
_____________ О.Г. Локтионова
«___» ________ 2018 г.

ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ МАТРИЧНЫХ ИГР

Методические указания к практическому занятию
по дисциплине «Методы оптимальных решений»
для студентов направления подготовки
38.03.01 «Экономика»

Курск 2018

УДК 519.6

Составители: В.В. Свиридов, Т.В. Алябьева

Рецензент:
кандидат технических наук, доцент кафедры программной инженерии ЮЗГУ *В.В. Апальков*

Графоаналитический метод решения матричных игр: методические указания к практическому занятию по дисциплине «Методы оптимальных решений» для студентов направления подготовки 38.03.01 «Экономика» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: В.В. Свиридов, Т.В. Алябьева. Курск, 2018. 13 с.

Изложены основные сведения о решении матричных игр вида $(m, 2)$ и $(2, n)$ графоаналитическим методом. Рассмотрены примеры выполнения заданий. Приведены варианты заданий, контрольные вопросы к защите практической работы.

Методические указания соответствуют требованиям рабочей программы по дисциплине «Методы оптимальных решений».

Материал предназначен для студентов 38.03.01 «Экономика» очной и заочной форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 02.10.2018.. Формат 60 х 84 1/16.
Усл. печ. л.0,7. Уч.- изд. л.0,6. Тираж 100 экз. Заказ 2140. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Содержание

1. Цель занятия 4
2. Краткие теоретические сведения 4
3. Пример выполнения задания 6
4. Индивидуальные задания 10
5. Контрольные вопросы 13

ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ МАТРИЧНЫХ ИГР

1. Цель занятия

Целью практического занятия является получение навыков решения матричных игр вида $(m, 2)$ и $(2, n)$ графоаналитическим методом.

Задание. Игры $(m, 2)$ и $(2, n)$ заданы своими матрицами. Выяснить наличие седловых точек у обеих игр, в случае их отсутствия графоаналитическим методом найти оптимальные смешанные стратегии обоих игроков и цену игры.

2. Краткие теоретические сведения

Теория игр анализирует принятие решений экономическими субъектами, которых называют, по традиции, игроками, в ситуациях, когда на результаты этих решений влияют действия, предпринимаемые другими экономическими субъектами. Такие ситуации принято называть играми.

Игрок – это просто термин, который удобен для проведения аналогии изучаемой ситуации с салонной игрой с четко описанными правилами. Каждый игрок обладает определенной свободой выбора действий. Своими действиями игрок влияет не только на свой результат, но и на результаты всех остальных. Результат оценивается заданной для каждого игрока функцией выигрыша. Считается, что цель игрока – максимизировать свой выигрыш.

Игра – математическая модель конфликтной ситуации.

Ход в игре – выбор и осуществление игроком одного из предусмотренных правилами игры действий.

Стратегия – последовательность всех ходов до окончания игры.

Классификация игр в зависимости от числа стратегий, по числу игроков, в зависимости от взаимоотношений игроков и т.п.

В играх *с нулевой суммой* одни игроки выигрывают за счет других, то есть суммарный выигрыш всех игроков равен нулю.

Парные игры с нулевой суммой называются *антагонистическими*.

Конечные антагонистические игры называются *матричными* играми. В общем случае матричная игра задается прямоугольной матрицей размера m x n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right)_{mxn}$$

Нижняя цена игры (максимин): $\alpha = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = \max\limits_i \alpha_i$

Верхняя цена игры (мимимакс): $\beta = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = \min\limits_j \beta_j$

Чистая стратегия игрока – это возможный ход игрока, выбранный им с вероятностью, равной единице.

Игры *с седловой точкой* это такая игра, что игрок 1 имеет чистую максиминную стратегию, а игрок 2 чистую минимаксную стратегию, и при этом $\alpha = \beta = \nu$. Тогда говорят, что игра решается в *чистых стратегиях*.

Смешанной стратегией первого (второго) игрока называется вектор

$$\bar{x} = \left(x_1, x_2, ..., x_m\right),\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,m},\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

$$\left(\bar{y} = \left(y_1, y_2, ..., y_n\right),\ y_j \ge 0,\ i = \overline{1,n},\ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1\right).$$

Платежная функция игры: $f\left(\bar{x}, \bar{y}\right) = \sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} x_i y_j$.

Стратегии $\bar{x}^* = \left(x_1^*, x_2^*, ..., x_m^*\right),\ \bar{y}^* = \left(y_1^*, y_2^*, ..., y_n^*\right)$

называются *оптимальными*, если для произвольных стратегий $\bar{x} = \left(x_1, x_2, ..., x_m\right),\ \bar{y} = \left(y_1, y_2, ..., y_n\right)$ выполняется условие $f\left(\bar{x}, \bar{y}^*\right) \le f\left(\bar{x}^*, \bar{y}^*\right) \le f\left(\bar{x}^*, \bar{y}\right)$.

Решением игры называется совокупность оптимальных стратегий и цены игры.

<u>Теорема фон Ней</u>мана (основная теорема матричных игр). Любая матричная игра имеет, по крайней мере, одно решение в смешанных стратегиях – две оптимальные стратегии и соответствующую им цену.

3. Пример выполнения задания

Пример 1. Рассмотрим игру с матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение.

Выясним наличие у данной игры седловой точки.

Найдем нижнюю цену игры:

$\alpha = \max\left\{\min\{1, 3,1, 4\}, \min\{2, 1, 4,0\}\right\} = \max\{1,0\} = 1$.

Найдем верхнюю цену игры:

$\beta = \min\left\{\max\{1,2\}, \max\{3,1\}, \max\{1,4\}, \{4,0)\right\} = \min\{2,3,4,4\} = 2$.

Таким образом, нижняя цена игры меньше верхней цены игры, поэтому седловой точки у игры не существует.

Найдем решение игры в смешанных стратегиях.

Пусть первый игрок, у которого две чистые стратегии, выбрал смешанную стратегию $x = (\xi, 1-\xi), 0 \le \xi \le 1$.

Предположим, что второй игрок выбрал одну из своих стратегий, например первую. Тогда выигрыш первого игрока будет

$V(\xi,1) = 1\xi + 2(1-\xi) = 2 - \xi$.

Аналогично, если второй игрок выбрал вторую стратегию, то средний выигрыш первого игрока составит

$V(\xi,2) = 3\xi + 1\cdot(1-\xi) = 1 + 2\xi$;

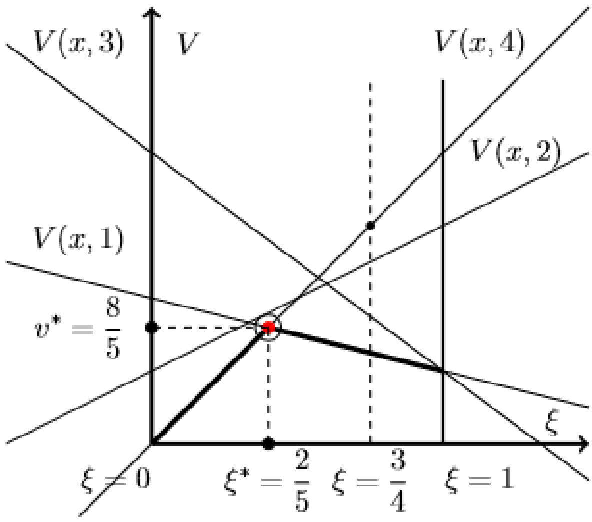
В случае третьей стратегии второго игрока будем иметь:

$V(\xi,3) = 1\xi + 4(1-\xi) = 4 - 3\xi$

и для четвертой стратегии:

$V(\xi,4) = 4\xi + 0(1-\xi) = 4\xi$.

Изобразим эти выигрыши на плоскости (V,ξ) .



При каждом значении ξ выигрыш первого игрока определяется нижней огибающей $\min\limits_j V(\xi, j)$. Первый игрок стремится к максимизации своего выигрыша, поэтому он выбирает значение $\xi^* = \max\limits_{\xi} \min\limits_j V(\xi, j)$. Из чертежа видим, что точка максимума нижней огибающей определяется из условия пересечение прямых $V(x,1)$ и $V(x,4)$. То есть мы имеем уравнение $2 - \xi = 4\xi$, откуда $\xi^* = \dfrac{2}{5}$. Получаем: $x^* = \left(\xi^*, 1 - \xi^*\right) = \left(\dfrac{2}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$. Гарантированный выигрыш первого игрока, то есть цена игры при этом составляет $v^* = V\left(\xi^*, 1\right) = 2 - \xi^* = 2 - \dfrac{2}{5} = \dfrac{8}{5}$.

Найдем теперь оптимальную стратегию второго игрока. Пусть эта стратегия имеет вид: $y^* = \left(\eta_1^*, \eta_2^*, \eta_3^*, \eta_4^*\right)$, где $\sum\limits_{i=1}^{4} \eta_i^* = 1, \eta_i^* \ge 0,\ i = 1, ..., 4.$

При этом он обеспечивает себе минимально возможный средний проигрыш $v^* = \sum\limits_{j=1}^{4} \eta_j^* V\left(\xi^*, j\right) = \dfrac{8}{5}\eta_1^* + \dfrac{9}{5}\eta_2^* + \dfrac{14}{5}\eta_3^* + \dfrac{8}{5}\eta_4^* = \dfrac{8}{5}.$

Так как $V\left(\xi^*,2\right) > \frac{8}{5}, V\left(\xi^*,3\right) > \frac{8}{5}$, то будем иметь $\eta_2^* = \eta_3^* = 0$, то есть вторая и третья стратегии не применяются игроком как невыгодные. По теореме двойственности, если $\xi_i^* > 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\eta_{ji}^* = v^* = \frac{8}{5}$.. В нашем случае $\xi_1^* = \frac{2}{5} > 0, \xi_2^* = \frac{3}{5} > 0$. Тогда получаем систему:

$$\begin{cases} \eta_1^* + 4\eta_2^* = \frac{8}{5} \\ 2\eta_1^* = \frac{8}{5} \end{cases}$$

Отсюда получаем $\eta_1^* = \frac{4}{5}, \eta_2^* = \frac{1}{5}$.

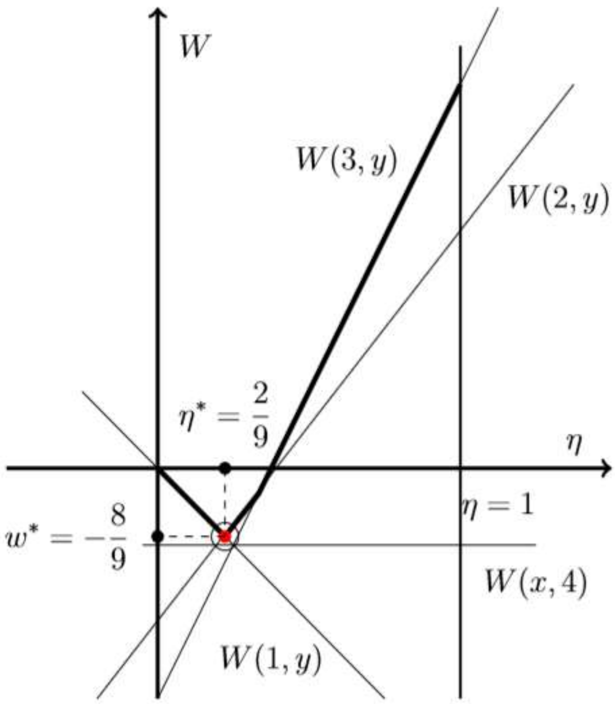
Итак, оптимальный вектор стратегии второго игрока имеет вид: $\eta^* = \left(\frac{4}{5}, 0, 0, \frac{1}{5}\right)$.

Пример 2. Найти графоаналитическим методом оптимальные смешанные стратегии игроков в игре с матрицей выигрыша

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 3 & -2 \\ 5 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Решение.

Графоаналитическое решение данной игры показано на следующем рисунке:



Для нахождения оптимальной стратегии $y=(\eta,1-\eta)$ второго игрока мы рассматриваем функции среднего выигрыша первого игрока для каждой из его возможных стратегий: $W(\eta,1)=-4\eta$, $W(\eta,2)=3\eta-2(1-\eta)=-2+5\eta$, $W(\eta,3)=5\eta-3(1-\eta)=-3+8\eta$, $W(\eta,4)=-1\eta-1(1-\eta)=-1$.

При каждом выборе величины $\eta\in[0,1]$ вторым игроком, первый игрок, выбирая лучшую стратегию, получает выигрыш, соответствующий верхней огибающей:

$W(\eta)=\max\limits_{i=1,2,3,4} W(\eta,i)$. При этом, второй игрок, стремясь минимизировать свой проигрыш, выбирает точку минимума верхней огибающей: $\eta^*=\min\limits_{\eta\in[0,1]} W(\eta)$. Из рисунка определяем, что точка минимума верхней огибающей определяется как пересечение прямых $W(\eta,1)=-4\eta$ и $W(\eta,2)=-2+5\eta$. Получаем уравнение $-2+5\cdot\eta=-4\eta$, откуда $\eta^*=\dfrac{2}{9}$, отсюда $y^*=(\eta^*,1-\eta^*)=\left(\dfrac{2}{9},\dfrac{7}{9}\right)$. Цена игры равна $v^*=W(\eta^*,1)=-4\dfrac{2}{9}=-\dfrac{8}{9}$, то есть. первый игрок в среднем проигрывает 8/9. Для определения оптимальной стратегии

$x^* = \left(\xi_1^*, \xi_2^*, \xi_3^*, \xi_4^*\right),\ \sum_{i=1}^{4} \xi_i^* = 1,\ \xi_i^* \ge 0,\ i = 1, ..., 4$ заметим, что прямые $W\left(\eta^*, 3\right) < v^* = -8/9$, $W\left(\eta^*, 4\right) < v^* = -8/9$, поэтому стратегии 3 и 4 не используются первым игроком, как невыгодные. Поэтому $\xi_3^* = \xi_4^* = 0$.

По теории двойственности имеем уравнения:

$-4\xi_1^* + 3\xi_2^* + 5\xi_3^* - \xi_4^* = -8/9;$

$0\xi_1^* - 2\xi_2^* - 3\xi_3^* - \xi_4^* = -8/9;$

или

$-4\xi_1^* + 3\xi_2^* = -8/9;$

$0\xi_1^* - 2\xi_2^* = -8/9;$

Отсюда получаем $\xi_2^* = 4/9, \xi_1^* = 5/9$.

Таким образом, окончательно находим: $x^* = \left(5/9, 4/9, 0, 0\right)$.

4. Индивидуальные задания

№	A	№	A
1	1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ 2) $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 3 & -4 \\ 5 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$	2	1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ 2) $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 3 & -4 \\ 5 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$
3	1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ 2) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 4 \\ 5 & 3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$	4	1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ 2) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

№	A	№	A
5	1) $A=\begin{pmatrix}1&2&2&1\\3&1&4&2\end{pmatrix}$ 2) $A=\begin{pmatrix}4&2\\3&4\\2&3\\6&1\end{pmatrix}$	6	1) $A=\begin{pmatrix}1&2&2&1\\3&1&5&2\end{pmatrix}$ 2) $A=\begin{pmatrix}4&2\\1&4\\2&3\\6&1\end{pmatrix}$
7	1) $A=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\3&1&4&2\end{pmatrix}$ 2) $A=\begin{pmatrix}4&1\\3&4\\5&0\\5&1\end{pmatrix}$	8	1) $A=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\3&1&3&4\end{pmatrix}$ 2) $A=\begin{pmatrix}4&1\\3&4\\2&0\\5&1\end{pmatrix}$
9	1) $A=\begin{pmatrix}5&2&1&2\\3&1&3&4\end{pmatrix}$ 2) $A=\begin{pmatrix}4&3\\3&4\\2&0\\5&1\end{pmatrix}$	10	1) $A=\begin{pmatrix}2&2&1&2\\3&1&3&4\end{pmatrix}$ 2) $A=\begin{pmatrix}4&3\\3&4\\4&0\\5&1\end{pmatrix}$
11	1) $A=\begin{pmatrix}2&0&1&2\\3&6&3&4\end{pmatrix}$ 2) $A=\begin{pmatrix}4&1\\3&4\\4&0\\5&1\end{pmatrix}$	12	1) $A=\begin{pmatrix}2&0&1&2\\3&6&3&4\end{pmatrix}$ 2) $A=\begin{pmatrix}4&1\\3&4\\4&0\\3&1\end{pmatrix}$

№	A	№	A
13	1) $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ 2) $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 4 \\ 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	14	1) $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ 2) $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 4 \\ 4 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$
15	1) $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ 2) $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -4 \\ 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	16	1) $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 6 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ 2) $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -4 \\ 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
17	1) $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ 2) $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -4 \\ 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	18	1) $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ 2) $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -4 \\ 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
19	1) $A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ 2) $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -4 \\ 4 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$	20	1) $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ 2) $A=\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 3 & -4 \\ 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

№	A	№	A
21	1) $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ 2) $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -4 \\ 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$	22	1) $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ 2) $A=\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 3 & -4 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$
23	1) $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ 2) $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -4 \\ -4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	24	1) $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & -6 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ 2) $A=\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 3 & -4 \\ 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

5. Контрольные вопросы

1. Конфликт. Игровые модели.
2. Матричные игры и стратегии игроков.
3. Теорема фон Неймана о существовании седловой точки в смешанном расширении игры.
4. Распределение вложений капитала на основе игровых критериев.
5. Основная теорема теории матричных игр.
6. Аналитический метод решения задачи теории игр.
7. Игры 2х2, решение в чистых и смешанных стратегиях.
8. Игры 2хn и nх2, графический метод решения.