

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Емельянов Сергей Геннадьевич

Должность: ректор

Дата подписания: 01.09.2018

Уникальный программный ключ:

9ba7d3e34c012eba476ffd2d064cf2781953be730d2374d16f3c0ce536f0fc6

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования

«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра программной инженерии



ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ МАТРИЧНЫХ ИГР

Методические указания к практическому занятию
по дисциплине «Методы оптимальных решений»
для студентов направления подготовки
38.03.01 «Экономика»

Курск 2018

УДК 519.6

Составители: В.В. Свиридов, Т.В. Алябьева

Рецензент:

кандидат технических наук, доцент кафедры программной инженерии
ЮЗГУ *В.В. Апальков*

Графоаналитический метод решения матричных игр: методические указания к практическому занятию по дисциплине «Методы оптимальных решений» для студентов направления подготовки 38.03.01 «Экономика» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: В.В. Свиридов, Т.В. Алябьева. Курск, 2018. 13 с.

Изложены основные сведения о решении матричных игр вида $(m, 2)$ и $(2, n)$ графоаналитическим методом. Рассмотрены примеры выполнения заданий. Приведены варианты заданий, контрольные вопросы к защите практической работы.

Методические указания соответствуют требованиям рабочей программы по дисциплине «Методы оптимальных решений».

Материал предназначен для студентов 38.03.01 «Экономика» очной и заочной форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 02.10.2018.. Формат 60 x 84 1/16.

Усл. печ. л.0,7. Уч.- изд. л.0,6. Тираж 100 экз. Заказ 2140. Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет.

305040, Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Содержание

1. Цель занятия	4
2. Краткие теоретические сведения	4
3. Пример выполнения задания	6
4. Индивидуальные задания	10
5. Контрольные вопросы.....	13

ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ МАТРИЧНЫХ ИГР

1. Цель занятия

Целью практического занятия является получение навыков решения матричных игр вида $(m, 2)$ и $(2, n)$ графоаналитическим методом.

Задание. Игры $(m, 2)$ и $(2, n)$ заданы своими матрицами. Выяснить наличие седловых точек у обеих игр, в случае их отсутствия графоаналитическим методом найти оптимальные смешанные стратегии обоих игроков и цену игры.

2. Краткие теоретические сведения

Теория игр анализирует принятие решений экономическими субъектами, которых называют, по традиции, игроками, в ситуациях, когда на результаты этих решений влияют действия, предпринимаемые другими экономическими субъектами. Такие ситуации принято называть играми.

Игрок – это просто термин, который удобен для проведения аналогии изучаемой ситуации с салонной игрой с четко описанными правилами. Каждый игрок обладает определенной свободой выбора действий. Своими действиями игрок влияет не только на свой результат, но и на результаты всех остальных. Результат оценивается заданной для каждого игрока функцией выигрыша. Считается, что цель игрока – максимизировать свой выигрыш.

Игра – математическая модель конфликтной ситуации.

Ход в игре – выбор и осуществление игроком одного из предусмотренных правилами игры действий.

Стратегия – последовательность всех ходов до окончания игры.

Классификация игр в зависимости от числа стратегий, по числу игроков, в зависимости от взаимоотношений игроков и т.п.

В играх с нулевой суммой одни игроки выигрывают за счет других, то есть суммарный выигрыш всех игроков равен нулю.

Парные игры с нулевой суммой называются *антагонистическими*.

Конечные антагонистические игры называются *матричными* играми. В общем случае матричная игра задается прямоугольной матрицей размера $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m \times n}$$

Нижняя цена игры (максимин): $\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = \max_i \alpha_i$

Верхняя цена игры (минимакс): $\beta = \min_j \max_i a_{ij} = \min_j \beta_j$

Чистая стратегия игрока – это возможный ход игрока, выбранный им с вероятностью, равной единице.

Игры с седловой точкой это такая игра, что игрок 1 имеет чистую максиминную стратегию, а игрок 2 чистую минимаксную стратегию, и при этом $\alpha = \beta = v$. Тогда говорят, что игра решается в чистых стратегиях.

Смешанной стратегией первого (второго) игрока называется вектор

$$\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m), \quad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad \sum_{i=1}^m x_i = 1$$

$$\left(\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n), \quad y_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad \sum_{j=1}^n y_j = 1 \right).$$

Платежная функция игры: $f(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i y_j$.

Стратегии $\bar{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*), \quad \bar{y}^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*)$

называются *оптимальными*, если для произвольных стратегий $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m), \quad \bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ выполняется условие

$$f(\bar{x}, \bar{y}^*) \leq f(\bar{x}^*, \bar{y}^*) \leq f(\bar{x}^*, \bar{y}).$$

Решением игры называется совокупность оптимальных стратегий и цены игры.

Теорема фон Неймана (основная теорема матричных игр). Любая матричная игра имеет, по крайней мере, одно решение в смешанных стратегиях – две оптимальные стратегии и соответствующую им цену.

3. Пример выполнения задания

Пример 1. Рассмотрим игру с матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение.

Выясним наличие у данной игры седловой точки.

Найдем нижнюю цену игры:

$$\alpha = \max \{ \min \{1, 3, 1, 4\}, \min \{2, 1, 4, 0\} \} = \max \{1, 0\} = 1.$$

Найдем верхнюю цену игры:

$$\beta = \min \{ \max \{1, 2\}, \max \{3, 1\}, \max \{1, 4\}, \{4, 0\} \} = \min \{2, 3, 4, 4\} = 2.$$

Таким образом, нижняя цена игры меньше верхней цены игры, поэтому седловой точки у игры не существует.

Найдем решение игры в смешанных стратегиях.

Пусть первый игрок, у которого две чистые стратегии, выбрал смешанную стратегию $x = (\xi, 1 - \xi), 0 \leq \xi \leq 1$.

Предположим, что второй игрок выбрал одну из своих стратегий, например первую. Тогда выигрыш первого игрока будет

$$V(\xi, 1) = 1\xi + 2(1 - \xi) = 2 - \xi.$$

Аналогично, если второй игрок выбрал вторую стратегию, то средний выигрыш первого игрока составит

$$V(\xi, 2) = 3\xi + 1 \cdot (1 - \xi) = 1 + 2\xi;$$

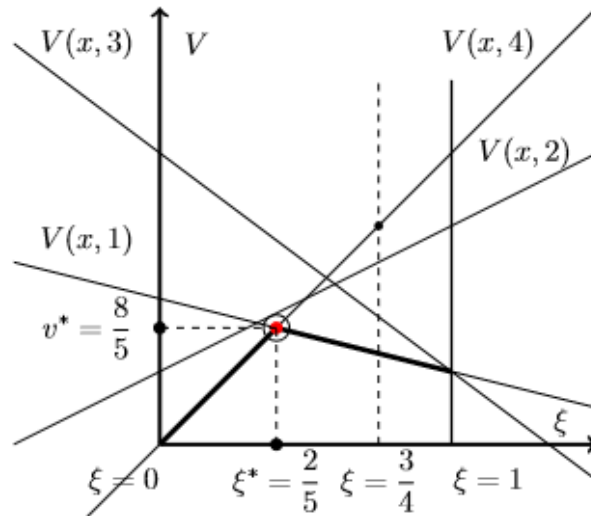
В случае третьей стратегии второго игрока будем иметь:

$$V(\xi, 3) = 1\xi + 4(1 - \xi) = 4 - 3\xi$$

и для четвертой стратегии:

$$V(\xi, 4) = 4\xi + 0(1 - \xi) = 4\xi.$$

Изобразим эти выигрыши на плоскости (V, ξ) .



При каждом значении ξ выигрыш первого игрока определяется нижней огибающей $\min_j V(\xi, j)$. Первый игрок стремится к максимизации своего выигрыша, поэтому он выбирает значение $\xi^* = \max_{\xi} \min_j V(\xi, j)$. Из чертежа видим, что точка максимума нижней огибающей определяется из условия пересечения прямых $V(x,1)$ и $V(x,4)$. То есть мы имеем уравнение $2 - \xi = 4\xi$, откуда $\xi^* = \frac{2}{5}$.

Получаем: $x^* = (\xi^*, 1 - \xi^*) = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$. Гарантированный выигрыш первого игрока, то есть цена игры при этом составляет $v^* = V(\xi^*, 1) = 2 - \xi^* = 2 - \frac{2}{5} = \frac{8}{5}$.

Найдем теперь оптимальную стратегию второго игрока. Пусть эта стратегия имеет вид: $y^* = (\eta_1^*, \eta_2^*, \eta_3^*, \eta_4^*)$, где

$$\sum_{i=1}^4 \eta_i^* = 1, \eta_i^* \geq 0, i = 1, \dots, 4.$$

При этом он обеспечивает себе минимально возможный средний проигрыш $v^* = \sum_{j=1}^4 \eta_j^* V(\xi^*, j) = \frac{8}{5} \eta_1^* + \frac{9}{5} \eta_2^* + \frac{14}{5} \eta_3^* + \frac{8}{5} \eta_4^* = \frac{8}{5}$.

Так как $V(\xi^*, 2) > \frac{8}{5}, V(\xi^*, 3) > \frac{8}{5}$, то будем иметь $\eta_2^* = \eta_3^* = 0$, то есть вторая и третья стратегии не применяются игроком как невыгодные. По теореме двойственности, если $\xi_i^* > 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^n a_{i,j} \eta_{ji}^* = v^* = \frac{8}{5}$. В нашем случае $\xi_1^* = \frac{2}{5} > 0, \xi_2^* = \frac{3}{5} > 0$.

Тогда получаем систему:

$$\begin{cases} \eta_1^* + 4\eta_2^* = \frac{8}{5} \\ 2\eta_1^* = \frac{8}{5} \end{cases}$$

Отсюда получаем $\eta_1^* = \frac{4}{5}, \eta_2^* = \frac{1}{5}$.

Итак, оптимальный вектор стратегии второго игрока имеет вид:

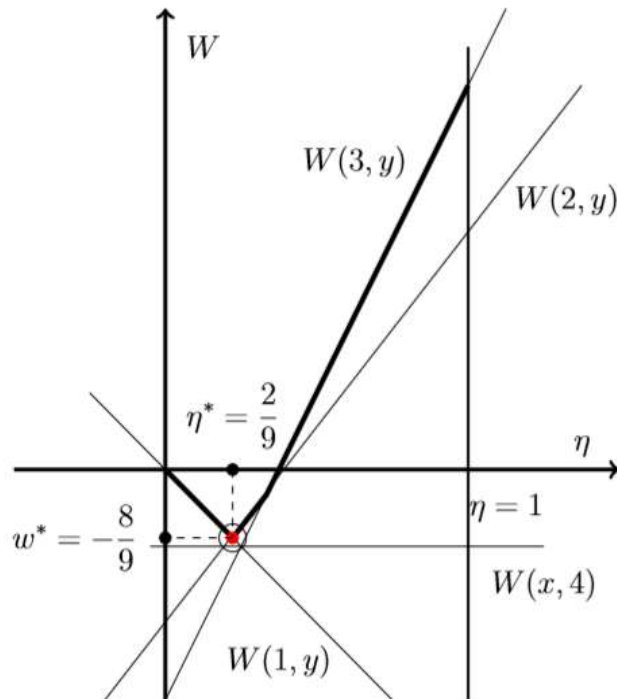
$$\eta^* = \left(\frac{4}{5}, 0, 0, \frac{1}{5} \right).$$

Пример 2. Найти графоаналитическим методом оптимальные смешанные стратегии игроков в игре с матрицей выигрыша

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 3 & -2 \\ 5 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Решение.

Графоаналитическое решение данной игры показано на следующем рисунке:



Для нахождения оптимальной стратегии $y = (\eta, 1 - \eta)$ второго игрока мы рассматриваем функции среднего выигрыша первого игрока для каждой из его возможных стратегий: $W(\eta, 1) = -4\eta$, $W(\eta, 2) = 3\eta - 2(1 - \eta) = -2 + 5\eta$, $W(\eta, 3) = 5\eta - 3(1 - \eta) = -3 + 8\eta$, $W(\eta, 4) = -1\eta - 1(1 - \eta) = -1$.

При каждом выборе величины $\eta \in [0, 1]$ вторым игроком, первый игрок, выбирая лучшую стратегию, получает выигрыш, соответствующий верхней огибающей:

$$W(\eta) = \max_{i=1, 2, 3, 4} W(\eta, i). \text{ При этом, второй игрок, стремясь}$$

минимизировать свой проигрыш, выбирает точку минимума верхней огибающей: $\eta^* = \min_{\eta \in [0, 1]} W(\eta)$. Из рисунка определяем, что точка

минимума верхней огибающей определяется как пересечение прямых $W(\eta, 1) = -4\eta$ и $W(\eta, 2) = -2 + 5\eta$. Получаем уравнение $-2 + 5 \cdot \eta = -4\eta$,

откуда $\eta^* = \frac{2}{9}$, отсюда $y^* = (\eta^*, 1 - \eta^*) = \left(\frac{2}{9}, \frac{7}{9}\right)$. Цена игры равна

$v^* = W(\eta^*, 1) = -4 \frac{2}{9} = -\frac{8}{9}$, то есть, первый игрок в среднем проигрывает $8/9$. Для определения оптимальной стратегии

$x^* = (\xi_1^*, \xi_2^*, \xi_3^*, \xi_4^*)$, $\sum_{i=1}^4 \xi_i^* = 1$, $\xi_i^* \geq 0$, $i = 1, \dots, 4$ заметим, что прямые $W(\eta^*, 3) < v^* = -8/9$, $W(\eta^*, 4) < v^* = -8/9$, поэтому стратегии 3 и 4 не используются первым игроком, как невыгодные. Поэтому $\xi_3^* = \xi_4^* = 0$.

По теории двойственности имеем уравнения:

$$-4\xi_1^* + 3\xi_2^* + 5\xi_3^* - \xi_4^* = -8/9;$$

$$0\xi_1^* - 2\xi_2^* - 3\xi_3^* - \xi_4^* = -8/9;$$

или

$$-4\xi_1^* + 3\xi_2^* = -8/9;$$

$$0\xi_1^* - 2\xi_2^* = -8/9;$$

Отсюда получаем $\xi_2^* = 4/9, \xi_1^* = 5/9$.

Таким образом, окончательно находим: $x^* = (5/9, 4/9, 0, 0)$.

4. Индивидуальные задания

№	A	№	A
1	1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ 2) $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 3 & -4 \\ 5 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$	2	1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ 2) $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 3 & -4 \\ 5 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$
3	1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ 2) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 4 \\ 5 & 3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$	4	1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ 2) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

№	A	№	A
5	$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 2 \\ 3 & 4 \\ 2 & 3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$ $2) A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \\ 2 & 3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$	6	$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \\ 4 & 2 \\ 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$ $2) A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$
7	$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 \\ 3 & 4 \\ 5 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ $2) A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 4 \\ 5 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$	8	$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 \\ 3 & 4 \\ 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ $2) A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 4 \\ 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$
9	$1) A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 3 \\ 3 & 4 \\ 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ $2) A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \\ 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$	10	$1) A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ $2) A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$
11	$1) A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 4 \\ 4 & 1 \\ 3 & 4 \\ 4 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ $2) A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 4 \\ 4 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$	12	$1) A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 4 \\ 4 & 1 \\ 3 & 4 \\ 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $2) A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 4 \\ 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

№	A	№	A
13	$1) A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $2) A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 4 \\ 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	14	$1) A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $2) A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 4 \\ 4 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$
15	$1) A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ $2) A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -4 \\ 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	16	$1) A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 6 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ $2) A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -4 \\ 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
17	$1) A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ $2) A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -4 \\ 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	18	$1) A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ $2) A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -4 \\ 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
19	$1) A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ $2) A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -4 \\ 4 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$	20	$1) A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ $2) A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 3 & -4 \\ 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

№	A	№	A
21	$1) A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ $2) A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -4 \\ 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$	22	$1) A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ $2) A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 3 & -4 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$
23	$1) A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ $2) A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -4 \\ -4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	24	$1) A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & -6 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ $2) A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 3 & -4 \\ 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

5. Контрольные вопросы

1. Конфликт. Игровые модели.
2. Матричные игры и стратегии игроков.
3. Теорема фон Неймана о существовании седловой точки в смешанном расширении игры.
4. Распределение вложений капитала на основе игровых критериев.
5. Основная теорема теории матричных игр.
6. Аналитический метод решения задачи теории игр.
7. Игры 2×2 , решение в чистых и смешанных стратегиях.
8. Игры $2 \times n$ и $n \times 2$, графический метод решения.