МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра программной инженерии

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
________ О.Г. Локтионова
«__» ______ 2018 г.

ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ. МЕТОД ГОМОРИ

Методические указания к практическому занятию
по дисциплине «Методы оптимальных решений»
для студентов направления подготовки
38.03.01 «Экономика»

Курск 2018

УДК 519.6

Составители: В.В. Свиридов, Т.В. Алябьева

Рецензент:
кандидат технических наук, доцент кафедры программной инженерии ЮЗГУ *В.В. Апальков*

Целочисленное линейное программирование. Метод Гомори: методические указания к практическому занятию по дисциплине «Методы оптимальных решений» для студентов направления подготовки 38.03.01 «Экономика» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: В.В. Свиридов, Т.В. Алябьева. Курск, 2018. 12 с.

Изложены основные сведения о решении целочисленных задач линейного программирования с использованием метода Гомори. Рассмотрены примеры выполнения заданий. Приведены варианты заданий, контрольные вопросы к защите практической работы.

Методические указания соответствуют требованиям рабочей программы по дисциплине «Методы оптимальных решений».
Материал предназначен для студентов 38.03.01 «Экономика» очной и заочной форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 02.10.2018.. Формат 60 х 84 1/16.
Усл. печ. л.0,7. Уч.- изд. л.0,6. Тираж 100 экз. Заказ 2133. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Содержание

ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ. МЕТОД ГОМОРИ

1. Цель занятия

Целью практического занятия является получение навыков решения целочисленных задач линейного программирования методом Гомори.

Задание. Для заданной стандартной задачи линейного программирования с дополнительным условием целочисленности переменных найти оптимальное решение методом Гомори.

2. Краткие теоретические сведения

Рассмотрим целочисленную стандартную задачу линейного программирования

$$z = c^T x \to \max;$$

$$Ax \le b;$$

$$x \ge 0;$$

$$x - \textit{целое}.$$

Такая задача описывает процесс нахождения оптимального плана производства продукции, объем которого измеряется в целых числах, то есть поштучно.

Метод отсечения Гомори состоит в формировании дополнительного ограничения, добавляемого после получения текущего оптимального дробного (то есть недопустимого) такого, что все целочисленные решения удовлетворяют отсечению, а найденное дробное не удовлетворяет (отсекается).

Данное ограничение добавляется в текущую симплекс-таблицу в качестве дополнительной строки и симплекс-таблица доводится до оптимальной с помощью двойственного симплекс-метода. Таким образом, после ряда отсечений, путем использования двойственного симплекс-метода будет получено искомое целочисленное оптимальное решение.

Недостатком этого метода является постоянное разрастание симплекс-таблицы при последовательном добавлении отсекающих ограничений.

Также важно отметить, что вычисления в симплекс-таблице нужно производить *точно, без округления и использовать обыкновенные дроби*.

Расчетные формулы для дополнительного ограничения имеют следующий вид. Пусть на очередном шаге в i-ой строке текущей симплекс-таблицы имеется дробное значение базисной переменной (небазисные переменные всегда равны 0), эту ситуацию можно записать так:

$$x_{B(i)} + \sum_{j \in N} \alpha_{i,j} x_j = \beta_i,$$

где $\{\beta_i\} = \beta_i - [\beta_i] > 0$, то есть дробная часть правой части i-го уравнения симплекс-таблицы положительна (то есть отлична от 0).

Отсечение Гомори, обладающее вышеперечисленными свойствами имеет вид:

$\sum_{j \in N} \{\alpha_{i,j}\} x_j \geq \{\beta_i\}$. Если строк симплекс-таблицы с дробной частью несколько, выбирается любая из них, предпочтительно, имеющая наибольшую дробную часть.

3. Пример выполнения задания

Решить целочисленную задачу линейного программирования:

$$z = 2x_1 + 3x_2 \to \max;$$

$$2x_1 + x_2 \leq 10;$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 11;$$

$$x_1,\ x_2 \geq 0;$$

$$x_1,\ x_2 \in Z.$$

Решим данную задачу обычным симплекс-методом сначала без учета условия целочисленности переменных.

Приведем задачу к каноническому виду.

$$z \to \max;$$

$$z - 2x_1 - 3x_2 + 0s_1 + 0s_2;$$

$$2x_1 + x_2 + s_1 + 0 \cdot s_2 = 10;$$

$$x_1 + 4x_2 + 0s_1 + s_2 = 11;$$

$$x_1,\ x_2,\ s_1, s_2 \geq 0;$$

Составим начальную симплекс-таблицу и приведем ее к оптимальному виду.

B	z	x_1	x_2	s_1	s_2	Реш.	B_i/A_{ij}	Комм.
z	1	–2	–3	0	0	0	–	Не опт.
s_1	0	2	1	1	0	10	10	$x_2 \to B$
s_2	0	1	4	0	1	11	11/4	$B \to s_2$

B	z	x_1	x_2	s_1	s_2	Реш.	Bi/A_{ij}	Комм.
z	1	–5/4	0	0	3/4	33/4	–	Не опт.
s_1	0	7/4	0	1	–1/4	29/4	29/5	$x_1 \to B$
x_2	0	1/4	1	0	1/4	11/4	11	$B \to s_1$

B	z	x_1	x_2	s_1	s_2	Реш.	B_i/A_{ij}	Комм.
z	1	0	0	5/7	4/7	94/7	–	Опт.
s_1	0	1	0	4/7	–1/7	29/7	–	–
x_2	0	0	1	–1/7	2/7	12/7	–	–

Получили оптимальное, но дробное решение
$z = 94/7,\ x_1 = 29/7,\ x_2 = 12/7$.

Берем самое первое уравнение с дробной правой частью, это z-уравнение (0-строка) и по нему добавляем отсечение Гомори, используя при этом только небазисные переменные в строке:

$$\left\{\frac{5}{7}\right\}s_1 + \left\{\frac{4}{7}\right\}s_2 \ge \left\{\frac{94}{7}\right\} = \left\{13 + \frac{3}{7}\right\} = \frac{3}{7};$$

$$\frac{5}{7}s_1 + \frac{4}{7}s_2 \ge \frac{3}{7};$$

$$\frac{5}{7}s_1 + \frac{4}{7}s_2 - s_3 = \frac{3}{7};$$

$$-\frac{5}{7}s_1 - \frac{4}{7}s_2 + s_3 = -\frac{3}{7};$$

Добавляем новое ограничение с базисной переменной s_3 в последнюю симплекс-таблицу и применяем двойственный симплекс-метод.

B	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Реш.	Комм.
z	1	0	0	5/7	4/7	0	94/7	Не доп.
x_1	0	1	0	4/7	–1/7	0	29/7	$B \to s_3$
x_2	0	0	1	–1/7	2/7	0	12/7	$s_1 \to B$
s_3	0	0	0	–5/7	–4/7	1	–3/7	
Z_i/A_{ij}	–	–	–	–1	–1	–	–	

B	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Реш.	Комм.
z	1	0	0	0	0	1	13	Опт
x_1	0	1	0	0	–3/5	4/5	19/5	–
x_2	0	0	1	0	2/5	–1/5	9/5	–
s_1	0	0	0	1	4/5	–7/5	3/5	

Получили оптимальное, но дробное решение:

$z = 13,\ x_1 = 19/5,\ x_2 = 9/5.$

Берем самое первое уравнение с дробной правой частью и по нему добавляем отсечение Гомори, используя при этом только небазисные переменные в строке:

$$\left\{-\frac{3}{5}\right\}s_2 + \left\{\frac{4}{5}\right\}s_3 \ge \left\{\frac{19}{5}\right\} = \left\{3 + \frac{4}{5}\right\} = \frac{4}{5};$$

$$\left\{-\frac{3}{5}\right\} = \left\{-1 + \frac{2}{5}\right\} = \frac{2}{5};$$

$$\frac{2}{5}s_2 + \frac{4}{5}s_3 \ge \frac{4}{5};$$

$$\frac{2}{5}s_2 + \frac{4}{5}s_3 - s_4 = \frac{4}{5};$$

$$-\frac{2}{5}s_2 - \frac{4}{5}s_3 + s_4 = -\frac{4}{5};$$

Добавляем новое ограничение с базисной переменной s_3 в последнюю симплекс-таблицу и применяем двойственный симплекс-метод.

B	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Реш.	Комм.
z	1	0	0	0	0	1	0	13	Опт
x_1	0	1	0	0	–3/5	4/5	0	19/5	–
x_2	0	0	1	0	2/5	–1/5	0	9/5	–
s_1	0	0	0	1	4/5	–7/5	0	3/5	
s_4	0	0	0	0	–2/5	–4/5	1	–4/5	
Z_i/A_{ij}	–	–	–	–	0	–5/4	–	–	

B	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Реш.	Комм.
z	1	0	0	0	0	1	0	13	Не доп.
x_1	0	1	0	0	0	2	–3/2	5	–
x_2	0	0	1	0	0	–1	0	1	–
s_1	0	0	0	1	0	–3	2	–1	
s_2	0	0	0	0	1	2	–5/2	2	
Z_i/A_{ij}	–	–	–	–	–	–1/3	–	–	

B	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Реш.	Комм.
z	1	0	0	1/3	0	0	2/3	12 2/3	Не доп.
x_1	0	1	0	2/3	0	0	–1/6	4 1/3	–
x_2	0	0	1	–1/3	0	0	–2/3	1 1/3	–
s_3	0	0	0	–1/3	0	1	–2/3	1/3	
s_2	0	0	0	2/3	1	0	–7/6	1 1/3	

Получили оптимальное, но дробное решение

$z = 12\ 2/3,\ x_1 = 4\,1/3,\ x_2 = 1\,1/3.$

Берем самое первое уравнение с дробной правой частью и по нему добавляем отсечение Гомори, используя при этом только небазисные переменные в строке:

$$\left\{\frac{1}{3}\right\}s_1+\left\{\frac{2}{3}\right\}s_4 \ge \left\{12+\frac{2}{3}\right\}=\frac{2}{3};$$

$$\frac{1}{3}s_1+\frac{2}{3}s_4 \ge \frac{2}{3};$$

$$\frac{1}{3}s_1+\frac{2}{3}s_4-s_5=\frac{2}{3};$$

$$-\frac{1}{3}s_1-\frac{2}{3}s_4+s_5=-\frac{2}{3};$$

B	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	Реш.	Комм.
z	1	0	0	1/3	0	0	2/3	0	12 2/3	Не доп.
x_1	0	1	0	2/3	0	0	–1/6	0	4 1/3	–
x_2	0	0	1	–1/3	0	0	–2/3	0	1 1/3	–
s_3	0	0	0	–1/3	0	1	–2/3	0	1/3	
s_2	0	0	0	2/3	1	0	–7/6	0	1 1/3	
s_5	0	0	0	–1/3	0	0	–2/3	1	–2/3	
Zi/Aij	–	–	–	–1	–	–	–1	–	–	

B	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	Реш.	Комм.
z	1	0	0	0	0	0	0	1	12	Не доп.
x_1	0	1	0	0	0	0	–3/2	2	3	–
x_2	0	0	1	0	0	0	0	–1	2	–
s_3	0	0	0	0	0	1	0	–1	1	
s_2	0	0	0	0	1	0	–5/3	2	0	
s_1	0	0	0	1	0	0	2	–3	2	

Получено оптимальное целочисленное решение.

$z=12,\ x_1=3,\ x_2=2.$

4. Индивидуальные задания

№	Задание	№	Задание
1	$z = 2x_1 + 3x_2 \to \max;$ $2x_1 + x_2 \le 10;$ $x_1 + 4x_2 \le 13;$ $x_1,\ x_2 \ge 0;$ $x_1,\ x_2 \in Z.$	2	$z = 2x_1 + 3x_2 \to \max;$ $2x_1 + x_2 \le 10;$ $x_1 + 3x_2 \le 13;$ $x_1,\ x_2 \ge 0;$ $x_1,\ x_2 \in Z.$
3	$z = 2x_1 + 4x_2 \to \max;$ $2x_1 + x_2 \le 10;$ $x_1 + 3x_2 \le 13;$ $x_1,\ x_2 \ge 0;$ $x_1,\ x_2 \in Z.$	4	$z = 2x_1 + 4x_2 \to \max;$ $2x_1 + x_2 \le 9;$ $x_1 + 3x_2 \le 13;$ $x_1,\ x_2 \ge 0;$ $x_1,\ x_2 \in Z.$
5	$z = 3x_1 + 4x_2 \to \max;$ $2x_1 + x_2 \le 9;$ $x_1 + 3x_2 \le 13;$ $x_1,\ x_2 \ge 0;$ $x_1,\ x_2 \in Z.$	6	$z = 3x_1 + 4x_2 \to \max;$ $2x_1 + x_2 \le 11;$ $x_1 + 3x_2 \le 13;$ $x_1,\ x_2 \ge 0;$ $x_1,\ x_2 \in Z.$
7	$z = 5x_1 + 4x_2 \to \max;$ $2x_1 + x_2 \le 11;$ $x_1 + 3x_2 \le 13;$ $x_1,\ x_2 \ge 0;$ $x_1,\ x_2 \in Z.$	8	$z = 5x_1 + 4x_2 \to \max;$ $3x_1 + x_2 \le 11;$ $x_1 + 3x_2 \le 13;$ $x_1,\ x_2 \ge 0;$ $x_1,\ x_2 \in Z.$
9	$z = 5x_1 + 4x_2 \to \max;$ $3x_1 + x_2 \le 14;$ $x_1 + 3x_2 \le 13;$ $x_1,\ x_2 \ge 0;$ $x_1,\ x_2 \in Z.$	10	$z = 5x_1 + 4x_2 \to \max;$ $3x_1 + x_2 \le 14;$ $x_1 + 4 \cdot x_2 \le 13;$ $x_1,\ x_2 \ge 0;$ $x_1,\ x_2 \in Z.$

№	Задание	№	Задание
11	$z = 2x_1 + 4x_2 \to \max;$ $3x_1 + x_2 \le 14;$ $x_1 + 4x_2 \le 13;$ $x_1,\ x_2 \ge 0;$ $x_1,\ x_2 \in Z.$	12	$z = 2x_1 + 4x_2 \to \max;$ $3x_1 + x_2 \le 14;$ $x_1 + 4x_2 \le 15;$ $x_1,\ x_2 \ge 0;$ $x_1,\ x_2 \in Z.$
13	$z = 2x_1 + 3x_2 \to \max;$ $3x_1 + x_2 \le 14;$ $x_1 + 4x_2 \le 15;$ $x_1,\ x_2 \ge 0;$ $x_1,\ x_2 \in Z.$	14	$z = 2x_1 + 3x_2 \to \max;$ $3x_1 + 2x_2 \le 17;$ $x_1 + 4x_2 \le 15;$ $x_1,\ x_2 \ge 0;$ $x_1,\ x_2 \in Z.$
15	$z = 4x_1 + 3x_2 \to \max;$ $3x_1 + 2x_2 \le 17;$ $x_1 + 4x_2 \le 15;$ $x_1,\ x_2 \ge 0;$ $x_1,\ x_2 \in Z.$	16	$z = 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \to \max;$ $3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \le 19;$ $x_1 + 4 \cdot x_2 \le 15;$ $x_1, x_2 \ge 0;$ $x_1, x_2 \in Z.$
17	$z = 4x_1 + 3x_2 \to \max;$ $3x_1 + 2x_2 \le 19;$ $x_1 + 3x_2 \le 15;$ $x_1,\ x_2 \ge 0;$ $x_1,\ x_2 \in Z.$	18	$z = 4x_1 + 2x_2 \to \max;$ $3x_1 + 2x_2 \le 19;$ $x_1 + 3x_2 \le 15;$ $x_1,\ x_2 \ge 0;$ $x_1,\ x_2 \in Z.$
19	$z = 4x_1 + 2x_2 \to \max;$ $3x_1 + 2x_2 \le 21;$ $x_1 + 3x_2 \le 15;$ $x_1,\ x_2 \ge 0;$ $x_1,\ x_2 \in Z.$	20	$z = 4x_1 + 3x_2 \to \max;$ $3x_1 + 2x_2 \le 21;$ $x_1 + 3x_2 \le 15;$ $x_1,\ x_2 \ge 0;$ $x_1,\ x_2 \in Z.$

№	Задание	№	Задание
21	$z=4x_1+3x_2\to\max;$ $3x_1+2x_2\le 23;$ $x_1+3x_2\le 15;$ $x_1,\ x_2\ge 0;$ $x_1,\ x_2\in Z.$	22	$z=4x_1+3x_2\to\max;$ $4x_1+2x_2\le 23;$ $x_1+3x_2\le 15;$ $x_1,\ x_2\ge 0;$ $x_1,\ x_2\in Z.$
23	$z=4x_1+5x_2\to\max;$ $4x_1+2x_2\le 23;$ $x_1+3x_2\le 15;$ $x_1,\ x_2\ge 0;$ $x_1,\ x_2\in Z.$	24	$z=4x_1+5x_2\to\max;$ $4x_1+2x_2\le 24;$ $x_1+3x_2\le 15;$ $x_1,\ x_2\ge 0;$ $x_1,\ x_2\in Z.$
25	$z=2x_1+5x_2\to\max;$ $4x_1+2x_2\le 24;$ $x_1+3x_2\le 15;$ $x_1,\ x_2\ge 0;$ $x_1,\ x_2\in Z.$	26	$z=2x_1+5x_2\to\max;$ $4x_1+2x_2\le 26;$ $x_1+3x_2\le 15;$ $x_1,\ x_2\ge 0;$ $x_1,\ x_2\in Z.$

5. Контрольные вопросы

1. Какое отличие стандартной целочисленной задачи линейного программирования от просто стандартной задачи?
2. Дать определение отсечения Гомори.
3. Привести вид отсечения Гомори.
4. Описать метод отсечений Гомори для получения оптимального целочисленного решения.