Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Емельянов Сергей Геннадьевич
Должность: ректор
Дата подписания: 04.02.2021 18:59:27
Уникальный программный ключ:
9ba7d3e34c012eba476ffd2d064cf2781953be730df2374d16f3c0ce536f0fc6

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
_______ О. Г. Локтионова
« 27 » _______ 2014 г.

РАСЧЕТ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ

Методические указания по выполнению лабораторной работы
для студентов технических и экономических специальностей

Курск 2014

УДК 510 (083)
Составители: Н.К. Зарубина, Н.Б. Федорова

Рецензент
Кандидат технических наук, доцент *Е.В. Журавлева*

Расчет вероятностей: методические указания по выполнению лабораторной работы / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Н.К. Зарубина, Н.Б. Федорова. Курск, 2014. 31 с.: ил. 24, табл. 4. Библиогр.: с. 31.

В данной работе содержатся краткие теоретические положения, необходимые для выполнения работы, методические указания по применению программных продуктов EXCEL и MathCAD.

Работа предназначена для студентов технических и экономических специальностей.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать _______. Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. ___. Уч.-изд. л. ___. Тираж 100 экз. Заказ ___. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Содержание

Задания…………………………………………………………...4

1 Теоретические положения………………………………... 8

1.1 Элементы комбинаторики……………………………….8
1.2 Классическое определение вероятности………………. 8
1.3 Геометрическое определение вероятности……………. 9
1.4 Повторные испытания………………………….............9

2. Использование ЭВМ…………………………………………12

2.1 Использование программного продукта EXCEL…........12
2.2. Использование программного продукта MathCAD……22

Контрольные вопросы….……………………………………30

Библиографический список…………………………………… 31

Цель работы:

1. Изучить методы решения комбинаторных задач;

2. Изучить методы решения задач на классическое и геометрическое определения вероятности;

3. Отработать методику применения формул Бернулли, локальной и интегральной теорем Лапласа, формул Пуассона в повторных испытаниях;

4. Освоить методику применения пакетов прикладных программ MathCAD и Excel при решении задач по теории вероятностей.

ЗАДАНИЯ

При решении заданий использовать:

- **m** – порядковый номер студента в списке группы,
- **N** – номер группы (уточнить у лектора).

1. Сколько n-значных чисел можно составить из цифр 1,2,3,4,…, n=mod(m+N, 5)+5, если каждая цифра входит в запись числа только один раз?

2. Сколько шифровок без повторений можно составить из k=mod(m, 3)+2 неповторяющихся символов, используя алфавит из n=mod(m+N, 7)+5 символов?

3. Сколькими способами можно выбрать k=mod(m, 4)+4 мячей из корзины, содержащей n=mod(m+N, 6)+8 мячей?

4. Выполнить задание из табл.1 согласно своему варианту.

5. Вероятность поражения мишени стрелком при каждом выстреле одинакова и равна p=0,1·(mod(m+N, 4)+4). Стрелок производит n=mod(m+N, 10)+20 выстрелов. Найти

1) вероятность того, что стрелок поразит мишень ровно k=mod(m+N, 5)+10 раз, используя:

а) формулу Бернулли;

б) локальную теорему Лапласа.

Сравнить полученные результаты.

2) вероятность того, что стрелок поразит мишень не менее k_1=mod(m+N, 5)+10 раз и не более k_2=mod(m+N, 5)+12 раз, используя:

а) формулу Бернулли;

б) интегральную теорему Муавра-Лапласа.

Сравнить полученные результаты.

6. Завод отправил на базу n=100·(mod(m+N, 3)+1) доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равна p=0,01·(mod(m, 2)+1). Используя формулу Пуассона, найти вероятность того, что на базу прибудет ровно k=mod(m, 5)+1 недоброкачественных изделия.

7. На плоскую фигуру D наугад бросается точка M. Найти вероятность того, что точка M попадает в область d, лежащую в D.

Уравнения линий, ограничивающих область D и дополнительно ограничивающих область d, приведены в табл. №2.

Таблица 1 – Задания к №4

$1 \le m < 10$	В группе m+2 студента. Фамилии всех студентов начинаются на разные буквы алфавита. Преподаватель просит написать фамилии всех студентов на листке. Какова вероятность того, что полученный список будет записан в алфавитном порядке?
$10 \le m < 20$	В партии из m+N деталей m-3 стандартные. Найти вероятность того, что m-5 взятые наугад детали окажутся стандартными.
$m \ge 20$	На каждой из n карточек записаны числа 1, 2, 3, …, n=mod(m,5)+5. Найти вероятность того, что на трех вынутых по одной и расположенных в линию карточках образуется число 123.

Таблица 2 − Уравнения линий, ограничивающих D и d

mod (m, 30)	D	d
1	$x=-1, x=2,\ y=0,\ y=4$	$y=4-x^2,\ y=0$
2	$x=0,\ x=2,\ y=0,\ y=2$	$y=\sqrt{4-x^2},\ y=0$
3	$x=0,\ x=2,\ y=0,\ y=2$	$y=x\cdot\sqrt{4-x^2},\ y=0$
4	$x=-1,\ x=0,\ y=0,\ y=1$	$y=(x+1)^2,\ y=0$
5	$x=0,\ x=3,\ y=0,\ y=4$	$y=2x-x^2+3,\ y=0$
6	$x=1,\ x=3,\ y=-1,\ y=0$	$y=x^2-4x+3,\ y=0$
7	$x=0,\ x=2,\ y=-1,\ y=0$	$y=x^2-2x,\ y=0$
8	$x=0,\ x=6,\ y=0,\ y=18$	$y=x\cdot\sqrt{36-x^2},\ y=0$
9	$x=0,\ x=\sqrt{3},\ y=0,\ y=2$	$y=x^2\cdot\sqrt{3-x^2},\ y=0$
10	$x=0,\ x=2,\ y=0,\ y=4$	$y=x^2\cdot\sqrt{4-x^2},\ y=0$
11	$x=0,\ x=1,\ y=0,\ y=0{,}5$	$y=\dfrac{x}{1+x},\ y=0$
12	$x=0,\ x=1,\ y=0,\ y=0{,}5$	$y=\dfrac{x}{(x^2+1)^2},\ y=0$
13	$x=0,\ x=1,\ y=-6,\ y=0$	$y=x^2+5x-6,\ y=0$
14	$x=0,\ x=3,\ y=0,\ y=10{,}5$	$y=x^2\cdot\sqrt{9-x^2},\ y=0$
15	$x=1,\ x=2,\ y=0,\ y=1$	$y=(x-1)^2,\ y=0$
16	$x=0,\ x=1,\ y=0,\ y=1{,}5$	$y=\dfrac{x+4}{4-x},\ y=0$
17	$x=0,\ x=2,\ y=0,\ y=7$	$y=x^3-1,\ y=0$
18	$x=0,\ x=1,\ y=0,\ y=2$	$y=\dfrac{(x+1)^2}{2},\ y=0$
19	$x=1,\ x=2,\ y=0,\ y=4$	$y=(x-3)^2,\ y=0$
20	$x=0,\ x=2,\ y=-2,\ y=0$	$y=x^3-2x^2,\ y=0$

mod (m, 30)	D	d
21	$x=1,\ x=4,\ y=0,\ y=3$	$y=x^2-4x+3,\ y=x-1$
22	$x=0,\ x=6,\ y=1,\ y=7{,}5$	$y=\frac{-x^2+7x+2}{2},\ y=\frac{x+2}{2}$
23	$x=-3,\ x=0,\ y=-7,\ y=-3$	$y=x^2+4x-3,\ y=x-3$
24	$x=-2,\ x=1,\ y=0,\ y=4$	$y=-x^2-2x+3,\ y=-x+1$
25	$x=-1,\ x=2,\ y=-1,\ y=3$	$y=-x^2+2x+2,\ y=x$
26	$x=0,\ x=2,\ y=0,\ y=3$	$y=x^2-x+1,\ y=x+1$
27	$x=-1,\ x=0{,}5,\ y=0,\ y=2$	$y=-2x^2+2,\ y=x+1$
28	$\tilde{o}=-4, x=-1, y=-1{,}25, y=5$	$y=x^2+3x+1,\ y=-2x-3$
29	$x=1,\ x=5,\ y=7,\ y=25{,}75$	$y=-3x^2+21x-11,$ $y=3x+4$
30	$x=-1,\ x=2,\ y=-5,\ y=1{,}25$	$y=-x^2+3x-1,\ y=2x-3$

1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

1.1 Элементы комбинаторики

Для успешного решения задач по теории вероятностей необходимо знать основные формулы комбинаторики – раздела математики, изучающего, в частности, методы решения задач на подсчет числа различных комбинаций.

Сочетанием из n элементов по k называется любая неупорядоченная комбинация из n элементов, содержащая k элементов (порядок элементов в сочетании не важен).

Размещением из n элементов по k называется любая упорядоченная комбинация из n элементов, содержащая k элементов (порядок элементов в размещении важен).

Перестановкой из n элементов называется любой упорядоченный набор из n элементов.

Обозначения и формулы для расчета всевозможных комбинаций приведены в таблице 3.

Таблица 3 − Формулы расчета числа сочетаний, размещений и перестановок

	Порядок НЕ важен	Порядок важен	
	сочетания	**размещения**	**перестановки**
без повторений	$C_n^k = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$	$A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$	$P_n = n!$
с повторе-ниями	$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$	$\overline{A}_n^k = n^k$	$P_n(n_1,\ldots,n_k) = \dfrac{n!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_k!}$ $(n_1+n_2+\ldots+n_k=n)$

1.2 Классическое определение вероятности

Вероятность события численно характеризует степень возможности его появления в рассматриваемом опыте.

Пусть производится опыт с n равновозможными исходами, образующими полную группу несовместных событий. Такие исходы называются *элементарными* событиями.

Элементарное событие, в результате которого наступает событие А, называется *благоприятным*.

Вероятностью события А называется отношение числа m благоприятных событий к n всевозможным:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \qquad (1.1)$$

Такое определение вероятности называется *классическим*.

1.3 Геометрическое определение вероятности

Обобщением понятия «классической вероятности» на случай опытов с бесконечным (несчетным) числом исходов является понятие «геометрической вероятности».

К этому понятию приводят задачи на подсчет вероятности попадания точки в некую область (отрезок, часть плоскости и т.д.). Пусть в n-мерном пространстве имеется некоторая область D и в ней содержится другая область d. Необходимо найти вероятность того, что взятая наудачу в области D точка попадет в область d. Тогда вероятность попадания точки в область d равна отношению меры (mes) области d к мере области D, т.е.

$$P = \frac{mes\, d}{mes\, D}. \qquad (1.2)$$

Примечание. Для одномерного пространства мера области – это длина, для двумерного – площадь, для трехмерного – объем.

1.4 Повторные испытания

Пусть производится n независимых повторных испытаний, в каждом из которых событие А может наступить с одной и той же вероятностью $p = P(A)$ или не наступить с вероятностью $q = P(\overline{A}) = 1 - p$ (данная схема испытаний называется схемой Бернулли).

Тогда вероятность того, что событие А наступит ровно k раз, находится по формуле Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \quad k = 0,1,2,...,n. \qquad (1.3)$$

Отсюда следует, что вероятность того, что событие А в n испытаниях (удовлетворяющих схеме Бернулли) наступит не менее k_1 и не более k_2 раз, равна:

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) = P_n(k_1) + P_n(k_1+1) + ... + P_n(k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} P_n(k). \qquad (1.4)$$

Однако при больших значениях n весьма затруднительно считать вероятности по формуле Бернулли. Поэтому при больших n используют, как правило, приближенные формулы Пуассона и Муавра-Лапласа.

Формула Пуассона

Если число испытаний n достаточно велико, а вероятность p достаточно мала, то вероятность $P_n(k)$ можно приближенно найти по формуле Пуассона:

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}, \text{ где } \lambda = np. \qquad (1.5)$$

Локальная формула Муавра-Лапласа

Если число испытаний n достаточно велико, а вероятности p и q не очень близки к нулю, то вероятность $P_n(k)$ можно приближенно найти по локальной формуле Муавра-Лапласа:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \qquad (1.6)$$

где $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ - функция Гаусса.

Интегральная формула Муавра-Лапласа

В условиях локальной формулы Муавра-Лапласа вероятность $P_n(k_1 \le k \le k_2)$ того, что число успехов k заключено между k_1 и k_2, можно приближенно найти по интегральной формуле Муавра-Лапласа:

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \qquad (1.7)$$

где $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$, $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ − функция Лапласа.

В табл. 4. приведены рекомендации по использованию приближенных формул для получения хорошей точности расчетов вероятностей в повторных испытаниях.

Таблица 4 − Рекомендации по использованию формул при расчете вероятностей в повторных испытаниях

	$P_n(k)$	$P_n(k_1 \le k \le k_2)$
n мало	$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$, $k = 0,1,2,...,n.$	$P_n(k_1 \le k \le k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} P_n(k)$
n велико npq>10 p и q не очень близки к 0	$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$ где $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$	$P_n(k_1 \le k \le k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$ где $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$, $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$
n велико np<10 $p \to 0$	$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$, где $\lambda = np$	$P_n(k_1 \le k \le k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} P_n(k)$

Замечание. Все указания по применению формул в табл.4. являются приближенными и носят скорее рекомендательный характер.

2 ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭВМ

2.1 Использование программного продукта EXCEL

Рассмотрим использование программного продукта EXCEL на примере следующих параметров:

- Порядковый номер студента в списке группы m=33;
- Номер группы N=9.

	A	B	C	D
1				
2		Порядковый номер студента		
3		m=	33	
4		Номер группы		
5		N=	9	
6				

Рисунок 2.1.1 − Пример ввода исходных значений в EXCEL

1. Сколько n-значных чисел можно составить из цифр 1,2,3,4,…, n=mod(m+N,5)+5, если каждая цифра входит в запись числа только 1 раз?

Чтобы вычислить n, воспользуемся встроенной функцией EXCEL:

=ОСТАТ(число; делитель). (2.1.1)

Поскольку порядок цифр важен и в числе используются все цифры, искомое число – число перестановок. Для вычисления числа перестановок $P_n=n!$ применим встроенную математическую функцию EXCEL:

=ФАКТР(число). (2.1.2)

	A	B	C	D
11				
12		n=	=ОСТАТ(C3+C5;5)+5	
13				
14		Ответ:	=ФАКТР(C12)	
15				

а)

	A	B	C	D
11				
12		n=	7	
13				
14		Ответ:	5040	
15				

б)

Рис. 2.1.2 – Формульный шаблон (а) и пример расчета числа перестановок (б) в EXCEL

2. Сколько шифровок без повторений можно составить из $k=mod(m,3)+2$ неповторяющихся символов, используя алфавит из $n=mod(m+N,7)+5$ символов?

Параметры k и n рассчитываем аналогично по формуле (2.1.1).

Т.к. порядок символов в шифровке важен, искомое количество – это число размещений k символов из n. Для расчета A_n^k воспользуемся встроенной статистической функцией EXCEL

=ПЕРЕСТ(число; число выбранных). (2.1.3)

	A	B	C	D
21				
22		k=	=ОСТАТ(C3;3)+2	
23		n=	=ОСТАТ(C3+C5;7)+5	
24				
25		Ответ:	=ПЕРЕСТ(C23;C22)	
26				

а)

	A	B	C	D
21				
22		k=	2	
23		n=	5	
24				
25		Ответ:	20	
26				

б)

Рис. 2.1.3 – Формульный шаблон (а) и пример расчета числа размещений (б) в EXCEL

3. Сколькими способами можно выбрать $k=mod(m,4)+4$ мячей из корзины, содержащей $n=mod(m+N,6)+8$ мячей?

Параметры k и n рассчитываем аналогично по формуле (2.1.1).

Поскольку порядок выбора мячей не важен, искомое число способов – это число сочетаний из n по k. Для вычисления числа C_n^k используем встроенную функцию EXCEL:

=ЧИСЛКОМБ(число; число выбранных). (2.1.4)

	A	B	C	D
31				
32		k=	=ОСТАТ(C3;4)+4	
33		n=	=ОСТАТ(C3+C5;6)+8	
34				
35		Ответ:	=ЧИСЛКОМБ(C33;C32)	
36				

а)

	A	B	C	D
31				
32		k=	5	
33		n=	8	
34				
35		Ответ:	56	
36				

б)

Рис. 2.1.4 – Формульный шаблон (а) и пример расчета числа сочетаний (б) в EXCEL

4. Рассмотрим пример выполнения задания б).

В партии из m+N деталей m-3 стандартные. Найти вероятность того, что m-5 взятые наугад детали окажутся стандартными.

Для расчета воспользуемся формулой (1.1) классической вероятности $p = \dfrac{m}{n}$, где m и n – число благоприятных и всевозможных событий соответственно.

Поскольку в данной задаче порядок взятых деталей не важен, искомое число событий - число сочетаний. Следовательно, число благоприятных событий – C_{m-3}^{m-5}, а число всевозможных событий – C_{m+N}^{m-5}.

Расчет числа событий проводим с использованием формулы (2.1.4).

Искомая вероятность равна $8{,}229 \cdot 10^{-9}$.

	B	C	D	E	F
42					
43	Всего деталей:		=C3+C5		
44	Стандартных:		=C3-3		
45	Взятых наугад:		=C3-5		
46					
47	Благоприятных событий:			=ЧИСЛКОМБ(D44;D45)	
48	Всевозможных событий:			=ЧИСЛКОМБ(D43;D45)	
49					
50	Вероятность:		=E47/E48		
51					

а)

	B	C	D	E
42				
43	Всего деталей:		42	
44	Стандартных:		30	
45	Взятых наугад:		28	
46				
47	Благоприятных событий:			435
48	Всевозможных событий:			52860229080
49				
50	Вероятность:		8,229E-09	
51				

б)

Рис. 2.1.5 – Формульный шаблон (а) и пример расчета вероятности (б) в EXCEL

5.1. Вероятность поражения мишени стрелком при каждом выстреле одинакова и равна $p=0{,}1\cdot(\mathrm{mod}(m+N,4)+4)$. Стрелок производит $n=\mathrm{mod}(m+N,10)+20$ выстрелов. Найти вероятность того, что стрелок поразит мишень ровно $k=\mathrm{mod}(m+N,5)+10$ раз, используя:

а) формулу Бернулли;

б) локальную теорему Лапласа.

Точное значение вероятности найдем по формуле Бернулли (1.3): $P_n(k)=C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}$, $q=1-p$. Параметры p, q, n и k рассчитываем аналогично с использованием формулы (2.1.1).

Для расчета вероятности $P_n(k)$ воспользуемся встроенной функцией EXCEL:

=БИНОМРАСП(k; n; p; 0). (2.1.5)

Приближенное значение вероятности находим с помощью локальной теоремы Лапласа по формуле (1.6): $P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\varphi(x)$, где $x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$.

При вычислении квадратного корня используем встроенную математическую функцию EXCEL:

=КОРЕНЬ(число). (2.1.6)

Для расчета значения функции $\varphi(x)$ воспользуемся встроенной статистической функцией EXCEL:

=НОРМРАСП(x; 0; 1; 0). (2.1.7)

В результате вычислений мы получили точное значение вероятности 0,1476 и приближенное – 0,1515. Как видим, локальная теорема Лапласа дает хорошее приближение (относительная погрешность вычислений составляет всего $\frac{0{,}1515-0{,}1476}{0{,}1476}\approx 0{,}026$ или 2,6%).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
58		а) формулу Бернулли;				б) локальную теорему Лапласа.					
59											
60		p=	=0,1*(ОСТАТ(C3+C5;4)+4)			x=	=(C63-C62*C60)/КОРЕНЬ(C62*C60*C61)				
61		q=	=1-C60			Ответ:	=1/КОРЕНЬ(C62*C60*C61)*НОРМРАСП(G60;0;1;0)				
62		n=	=ОСТАТ(C3+C5;10)+20								
63		k=	=ОСТАТ(C3+C5;5)+10								
64											
65		Ответ:	=БИНОМРАСП(C63;C62;C60;0)								
66											

Рис. 2.1.6 – Формульный шаблон расчета в EXCEL

	A	B	C	D	E	F	G	H
58		а) формулу Бернулли;				б) локальную теорему Лапласа.		
59								
60		p=	0,6			x=	-0,522233	
61		q=	0,4			Ответ:	0,15148552	
62		n=	22					
63		k=	12					
64								
65		Ответ:	0,1476					
66								

Рис 2.1.7 – Пример расчета вероятности по формуле Бернулли и локальной теореме Лапласа в EXCEL

5.2. Вероятность поражения мишени стрелком при каждом выстреле одинакова и равна p=0,1·(mod(m+N,4)+4). Стрелок производит n=mod(m+N,10)+20 выстрелов. Найти вероятность того, что стрелок поразит мишень не менее k_1=mod(m+N,5)+10 раз и не более k_2=mod(m+N,5)+12 раз, используя:

а) формулу Бернулли;

б) интегральную теорему Муавра-Лапласа.

Сравнить полученные результаты

Для нахождения точного значения вероятности трижды используем формулу Бернулли (2.1.5) и результаты складываем.

Приближенное значение вероятности находим с помощью интегральной теоремы Лапласа по формуле (1.7): $P_n(k_1 \le k \le k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, где $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Для расчета значения функции $\Phi(x)$ используем встроенную статистическую функцию EXCEL:

=НОРМРАСП(x; 0; 1: 1)-0,5. (2.1.8)

Полученные значения вероятностей существенно расходятся (погрешность приближения составляет $\dfrac{0{,}482 - 0{,}335}{0{,}335} \approx 0{,}43$ или 43%). Следовательно, в данном случае интегральная формула Муавра-Лапласа приводит к неудовлетворительному результату. Это можно объяснить тем, что величина $npq = 5{,}28 < 10$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
69		а) формулу Бернулли;				б) интегральную теорему Муавра-Лапласа.					
70											
71		p=	=0,1*(ОСТАТ(C3+C5;4)+4)			x1=	=(C74-C73*C71)/КОРЕНЬ(C73*C71*C72)				
72		q=	=1-C71			x2=	=(C75-C73*C71)/КОРЕНЬ(C73*C71*C72)				
73		n=	=ОСТАТ(C3+C5;10)+20			Ф(x1)=	=НОРМРАСП(G71;0;1;1)-0,5				
74		k1=	=ОСТАТ(C3+C5;5)+10			Ф(x2)=	=НОРМРАСП(G72;0;1;1)-0,5				
75		k2=	=ОСТАТ(C3+C5;5)+12								
76						Ответ:	=G74-G73				
77		Pn(12)=	=БИНОМРАСП(12;C73;C71;0)								
78		Pn(13)=	=БИНОМРАСП(13;C73;C71;0)								
79		Pn(14)=	=БИНОМРАСП(14;C73;C71;0)								
80		Ответ:	=C77+C78+C79								
81											

Рис. 2.1.8 – Формульный шаблон расчета в EXCEL

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
69		а) формулу Бернулли;				б) интегральную теорему Муавра-Лапласа.				
70										
71		p=	0,6			x1=	-0,522233			
72		q=	0,4			x2=	0,34815531			
73		n=	22			Ф(x1)=	-0,1992459			
74		k1=	12			Ф(x2)=	0,13613823			
75		k2=	14							
76						Ответ:	0,33538416			
77		Pn(12)=	0,1476							
78		Pn(13)=	0,17031							
79		Pn(14)=	0,16422							
80		Ответ:	0,48213							
81										

Рис. 2.1.9 – Пример расчета вероятности по формуле Бернулли и интегральной теореме Лапласа в EXCEL

6. Завод отправил на базу n=100·(mod(m+N,3)+1) доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равна p=0,01·(mod(m,2)+1). Используя формулу Пуассона, найти вероятность того, что на базу прибудет ровно k=mod(m,5)+1 недоброкачественных изделия.

Приближенное значение вероятности найдем с помощью формулы Пуассона (1.5): $P_n(k) \approx \dfrac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$, где $\lambda = np$.

Для расчета значения $P_n(k)$ воспользуемся встроенной статистической функцией EXCEL:

$$\textbf{=ПУАССОН(k; λ; 0).} \qquad (2.1.9)$$

	A	B	C	D	E
88					
89		p=	=0,01*(ОСТАТ(C3;2)+1)		
90		n=	=100*(ОСТАТ(C3+C5;3)+1)		
91		k=	=ОСТАТ(C3;5)+1		
92					
93		Ответ:	=ПУАССОН(C91;C90*C89;0)		
94					

а)

	A	B	C	D
88				
89		p=	0,02	
90		n=	100	
91		k=	4	
92				
93		Ответ:	0,09022	
94				

б)

Рис. 2.1.10 – Формульный шаблон (а) и пример расчета вероятности по формуле Пуассона (б) в EXCEL

7[1]*. Пусть область D ограничена линиями x = 0, x = 3, y = 0, y = 4,5. Область d дополнительно ограничена линиями* $y = x \cdot \sqrt{9 - x^2}$ *и y = 0.*

Для расчета воспользуемся формулой (1.2) геометрической вероятности $P = \dfrac{mes\, d}{mes\, D}$, где *mes* – это мера области. Для двумерного случая мера – это площадь, поэтому будем искать вероятность по формуле $P = \dfrac{Sd}{SD}$.

Изобразим области на графике.

Для этого сначала зададим столбец аргумента *x* с соответствующим шагом. Пусть шаг будет равен 0,1. Чтобы это сделать, в ячейку C8 внесем начальное значение x (0), в C9 – начальное значение, увеличенное на шаг (0+0,1=0,1). Далее выделим обе ячейки левой кнопкой мыши и «растянем» наш столбец до конечного значения (x=3), потянув за правый нижний угол выделения.

Теперь зададим столбец ординат *y*. Для этого в ячейке D8 запишем функцию $y = x \cdot \sqrt{9 - x^2}$, ограничивающую область *d* сверху. И далее вновь «растягиваем» столбец до конечного значения аргумента.

---

[1] Это задание проще выполнить в системе MathCAD. Поэтому дальнейшие методические указания к этому заданию для тех, кто хочет освоить построение графиков и приближенное вычисление определенных интегралов в EXCEL. Остальные же могут выполнить это задание в MathCAD.

Для построения графика выполним следующие действия:

- Щелкнем по пиктограмме «Мастер диаграмм»
- Выберем тип диаграммы «График», «График».
- На появившемся пустом окошке щелкаем правой кнопкой мыши и выбираем пункт «Выбрать данные». В «элементы легенды» выбираем значения столбца *y*, в «подписи горизонтальной оси» - значения столбца *x* и нажимаем «ОК».

На полученном графике щелкнем правой кнопкой мыши на оси Ох и выберем пункт «Добавить промежуточные линии сетки», а затем «Формат оси». Установим интервал между делениями 5 (5 шагов) и интервал между подписями также 5 (чтобы шаг сетки стал 0,5, а не 0,1). График готов.

Выполним расчет площадей областей *D* и *d*.

Очевидно, что область *D* – это прямоугольник. Ее площадь равна произведению длин смежных сторон.

Область *d* – это криволинейная трапеция, ограниченная линиями $y = x \cdot \sqrt{9 - x^2}$ и *y = 0*. Чтобы вычислить площадь криволинейной трапеции, достаточно вычислить $\int_0^3 x \cdot \sqrt{9 - x^2} dx$.

Но поскольку в EXCEL нет встроенной функции, вычисляющей определенный интеграл, воспользуемся приближенным методом вычисления - методом трапеций.

Согласно нему:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n} \cdot \left(f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) \right) + R, \quad (2.1.10)$$

где R – остаточный член (в расчетах его принимаем равным 0).

Соответственно, искомая геометрическая вероятность равна 0,6629.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
7		n	x	y							
8		0	0	=C8*((9-C8^2)^(1/2))							
9		1	0,1	=C9*((9-C9^2)^(1/2))							
10		2	0,2	=C10*((9-C10^2)^(1/2))							
11		3	0,3	=C11*((9-C11^2)^(1/2))							
12		4	0,4	=C12*((9-C12^2)^(1/2))							
13		5	0,5	=C13*((9-C13^2)^(1/2))							
14		6	0,6	=C14*((9-C14^2)^(1/2))							
15		7	0,7	=C15*((9-C15^2)^(1/2))							
16		8	0,8	=C16*((9-C16^2)^(1/2))							
17		9	0,9	=C17*((9-C17^2)^(1/2))							
18		10	1	=C18*((9-C18^2)^(1/2))							
19		11	1,1	=C19*((9-C19^2)^(1/2))							
20		12	1,2	=C20*((9-C20^2)^(1/2))							
21		13	1,3	=C21*((9-C21^2)^(1/2))							
22		14	1,4	=C22*((9-C22^2)^(1/2))							
23		15	1,5	=C23*((9-C23^2)^(1/		x0=	0				
24		16	1,6	=C24*((9-C24^2)^(1/		x1=	3				
25		17	1,7	=C25*((9-C25^2)^(1/		y0=	0				
26		18	1,8	=C26*((9-C26^2)^(1/		y1=	4,5				
27		19	1,9	=C27*((9-C27^2)^(1/2))							
28		20	2	=C28*((9-C28^2)^(1/		Sd=	=(C38-C8)*(D8+D38+2*СУММ(D9:D37))/(2*B38)				
29		21	2,1	=C29*((9-C29^2)^(1/		SD=	=(G24-G23)*(G26-G25)				
30		22	2,2	=C30*((9-C30^2)^(1/2))							
31		23	2,3	=C31*((9-C31^2)^(1/		P=	=G28/G29				
32		24	2,4	=C32*((9-C32^2)^(1/2))							
33		25	2,5	=C33*((9-C33^2)^(1/2))							
34		26	2,6	=C34*((9-C34^2)^(1/2))							
35		27	2,7	=C35*((9-C35^2)^(1/2))							
36		28	2,8	=C36*((9-C36^2)^(1/2))							
37		29	2,9	=C37*((9-C37^2)^(1/2))							
38		30	3	=C38*((9-C38^2)^(1/2))							

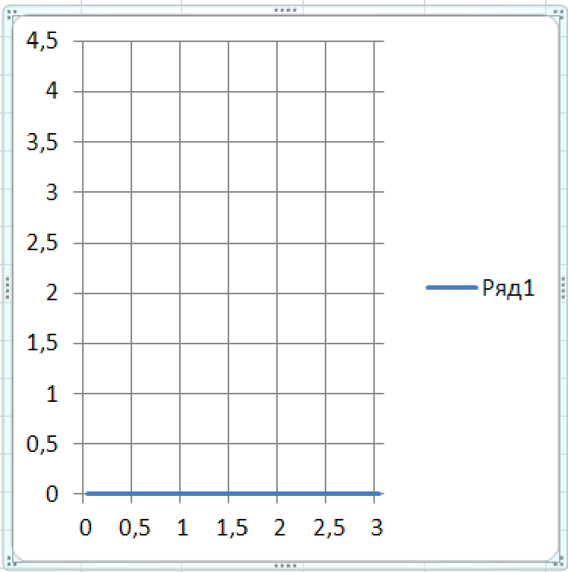

Рис. 2.1.11 – Формульный шаблон расчета геометрической вероятности в EXCEL

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
7		n	x	y					
8		0	0	0					
9		1	0,1	0,299833					
10		2	0,2	0,598665					
11		3	0,3	0,895489					
12		4	0,4	1,189285					
13		5	0,5	1,47902					
14		6	0,6	1,763633					
15		7	0,7	2,042033					
16		8	0,8	2,313093					
17		9	0,9	2,575636					
18		10	1	2,828427					
19		11	1,1	3,070163					
20		12	1,2	3,299455					
21		13	1,3	3,514812					
22		14	1,4	3,71462					
23		15	1,5	3,897114		x0=	0		
24		16	1,6	4,060345		x1=	3		
25		17	1,7	4,20213		y0=	0		
26		18	1,8	4,32		y1=	4,5		
27		19	1,9	4,411111					
28		20	2	4,472136		Sd=	8,9494		
29		21	2,1	4,4991		SD=	13,5		
30		22	2,2	4,487137					
31		23	2,3	4,430113		P=	0,6629		
32		24	2,4	4,32					
33		25	2,5	4,145781					
34		26	2,6	3,891324					
35		27	2,7	3,530708					
36		28	2,8	3,015692					
37		29	2,9	2,227532					
38		30	3	0					

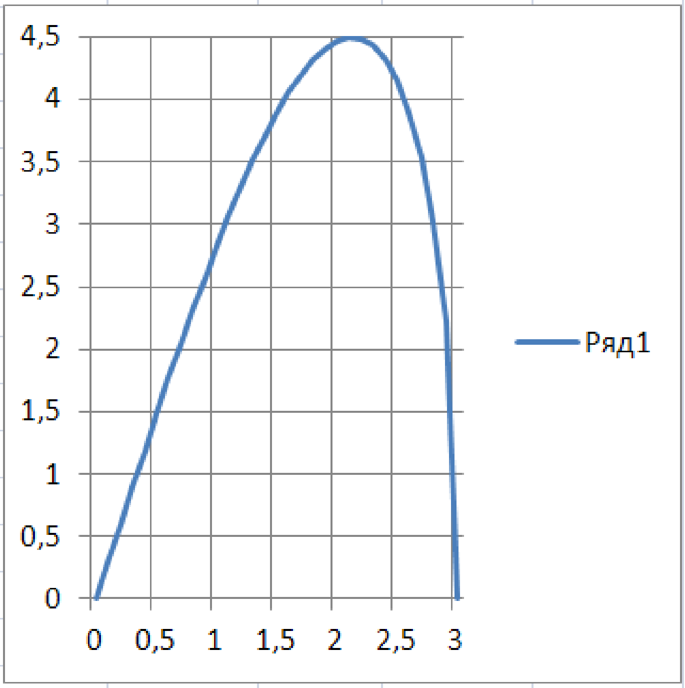

Рис. 2.1.12 – Пример расчета геометрической вероятности в EXCEL

2.2. Использование программного продукта MATHCAD

Рассмотрим использование программного продукта MathCAD на примере следующих параметров:

- Порядковый номер студента в списке группы m=33;
- Номер группы N=9.

$$m := 33$$

$$N := 9$$

Рис. 2.2.1 – Пример ввода исходных значений в MathCAD

1. Сколько n-значных чисел можно составить из цифр 1,2,3,4,…, n=mod(m+N,5)+5, если каждая цифра входит в запись числа только один раз?

Чтобы вычислить *n*, воспользуемся встроенной функцией MathCAD

mod(число; делитель). (2.2.1)

Поскольку порядок цифр важен и в числе используются все цифры, искомое число – число перестановок $P_n = n!$.

Для вычисления факториала в MathCAD можно набрать символ «!» на клавиатуре или нажать на кнопку факториала n! на панели «Калькулятор» («Calculator»).

$$n := \mathrm{mod}(m + N, 5) + 5$$

$$n = 7$$

$$P := n!$$

$$P = 5.04 \times 10^{3}$$

Рис. 2.2.2 – Пример расчета числа перестановок в MathCAD

2. Сколько шифровок без повторений можно составить из k=mod(m,3)+2 неповторяющихся символов, используя алфавит из n=mod(m+N,7)+5 символов?

Параметры *k* и *n* рассчитываем аналогично по формуле (2.2.1).

Т.к. порядок символов в шифровке важен, искомое количество – это число размещений из *n* символов по *k*. В MathCAD A_n^k вычисляется с помощью встроенной функции:

permut(число, число выбранных), (2.2.2)

(от англ. «permutation» - перестановка).

$k := \mathrm{mod}(m,3) + 2$

$k = 2$

$n := \mathrm{mod}(m + N,7) + 5$

$n = 5$

$A := \mathrm{permut}(n,k)$

$A = 20$

Рис. 2.2.3 – Пример расчета числа размещений в MathCAD

3. Сколькими способами можно выбрать k=mod(m,4)+4 мячей из корзины, содержащей n=mod(m+N,6)+8 мячей?

Параметры *k* и *n* рассчитываем аналогично по формуле (2.2.1).

Поскольку порядок выбора мячей не важен, искомое число способов – это число сочетаний из *n* по *k*.. Для вычисления C_n^k воспользуемся встроенной функцией MathCAD:

combin(число, число выбранных), (2.2.3)

(от англ. «combination» - сочетание).

$k := \mathrm{mod}(m,4) + 4$

$k = 5$

$n := \mathrm{mod}(m + N,6) + 8$

$n = 8$

$C := \mathrm{combin}(n,k)$

$C = 56$

Рис. 2.2.4 – Пример расчета числа сочетаний в MathCAD

4. Рассмотрим пример выполнения задания б).

В партии из m+N деталей m-3 стандартные. Найти вероятность того, что m-5 взятые наугад детали окажутся стандартными.

Для расчета воспользуемся формулой классической вероятности (1.1): $p = \frac{m}{n}$, где m и n – число благоприятных и всевозможных событий соответственно.

Поскольку в данной задаче порядок взятых деталей не важен, искомое число событий - число сочетаний. Следовательно, число благоприятных событий – C_{m-3}^{m-5}, а число всевозможных событий – C_{m+N}^{m-5}.

Расчет числа событий (числа сочетаний) вновь проводим с использованием формулы (2.2.3).

$$blag := combin(m-3, m-5)$$

$$blag = 435$$

$$all := combin(m+N, m-5)$$

$$all = 5.286 \times 10^{10}$$

$$P := \frac{blag}{all}$$

$$P = 8.229 \times 10^{-9}$$

Рис. 2.2.5 – Пример расчета вероятности в MathCAD.

5.1. Вероятность поражения мишени стрелком при каждом выстреле одинакова и равна p=0,1·(mod(m+N,4)+4). Стрелок производит n=mod(m+N,10)+20 выстрелов. Найти вероятность того, что стрелок поразит мишень ровно k=mod(m+N,5)+10 раз, используя:

а) формулу Бернулли;

б) локальную теорему Лапласа.

Точное значение вероятности найдем по формуле Бернулли (1.3): $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$, $q = 1 - p$.

Параметры p, q, n и k рассчитываем аналогично с использованием формулы (2.2.1).

Для расчета вероятности $P_n(k)$ воспользуемся встроенной функцией MathCAD:

dbinom(k, n, p). (2.2.4)

$$p := 0.1 \cdot (\mathrm{mod}(m + N, 4) + 4)$$
$$p = 0.6$$
$$n := \mathrm{mod}(m + N, 10) + 20$$
$$n = 22$$
$$k := \mathrm{mod}(m + N, 5) + 10$$
$$k = 12$$
$$Pk := \mathrm{dbinom}(k, n, p)$$
$$Pk = 0.148$$

Рис. 2.2.6 – Пример расчета вероятности по формуле Бернулли в MathCAD

Приближенное значение вероятности находим с помощью локальной теоремы Лапласа по формуле (1.6):

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{e^{-0,5x^2}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{e^{-0,5x^2}}{\sqrt{2\pi npq}}, \quad (2.2.5)$$

где $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

К сожалению, в MathCAD нет встроенной функции, вычисляющей функцию Гаусса $\varphi(x)$. Поэтому для вычисления приближенного значения вероятности введем вручную формулу (2.2.5).

$$x := \frac{(k - n \cdot p)}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}}$$
$$x = -0.522$$
$$Pk := \frac{\exp\left(-0.5 \cdot x^2\right)}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot n \cdot p \cdot (1 - p)}}$$
$$Pk = 0.151$$

Рис. 2.2.7 – Пример расчета вероятности по локальной теореме Муавра-Лапласа в MathCAD

В результате вычислений мы получили точное значение вероятности 0,148 и приближенное – 0,151. Как видим, локальная теорема Лапласа в этом случае дает хорошее приближение (погрешность вычислений составляет всего $\dfrac{0,151 - 0,148}{0,148} \approx 0,02$ или 2%).

5.2. Вероятность поражения мишени стрелком при каждом выстреле одинакова и равна p=0,1·(mod(m+N,4)+4). Стрелок производит n=mod(m+N,10)+20 выстрелов. Найти вероятность того, что стрелок поразит мишень не менее k_1=mod(m+N,5)+10 раз и не более k_2=mod(m+N,5)+12 раз, используя:

а) формулу Бернулли;

б) интегральную теорему Муавра-Лапласа.

Сравнить полученные результаты

Для нахождения точного значения вероятности трижды используем формулу Бернулли (аналогично №5.1.а) и результаты сложим. Для суммирования в MathCAD воспользуемся кнопкой , расположенной на панели «Исчисление» («Calculus»).

$$p := 0.1\cdot(\mathrm{mod}(m+N,4)+4)$$
$$p = 0.6$$
$$n := \mathrm{mod}(m+N,10)+20$$
$$n = 22$$
$$k1 := \mathrm{mod}(m+N,5)+10$$
$$k1 = 12$$
$$k2 := \mathrm{mod}(m+N,5)+12$$
$$k2 = 14$$
$$Pk := \sum_{k=k1}^{k2} \mathrm{dbinom}(k,n,p)$$
$$Pk = 0.482$$

Рис. 2.2.8 – Расчет вероятности по формуле Бернулли в MathCAD

Приближенное значение вероятности находим с помощью интегральной теоремы Лапласа по формуле (1.7): $P_n(k_1 \le k \le k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, где $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Для расчета значения функции $\Phi(x)$ используем встроенную статистическую функцию MathCAD:

$$\mathbf{cnorm(x)-0.5.} \tag{2.2.6}$$

$p := 0.1\cdot(\mathrm{mod}(m + N, 4) + 4)$

$p = 0.6$

$n := \mathrm{mod}(m + N, 10) + 20$

$n = 22$

$k1 := \mathrm{mod}(m + N, 5) + 10$

$k1 = 12$

$k2 := \mathrm{mod}(m + N, 5) + 12$

$k2 = 14$

$$x(k) := \frac{k - n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot(1 - p)}}$$

$P := (\mathrm{cnorm}(x(k2)) - 0.5) - (\mathrm{cnorm}(x(k1)) - 0.5)$

$P = 0.335$

Рис. 2.2.9 – Пример расчета вероятности по интегральной теореме Муавра-Лапласа в MathCAD

Полученные значения вероятностей существенно расходятся (погрешность приближения составляет $\dfrac{0{,}482 - 0{,}335}{0{,}335} \approx 0{,}43$ или 43%). Следовательно, в данном случае интегральная формула Муавра-Лапласа приводит к неудовлетворительному результату. Это можно объяснить тем, что величина $npq = 5{,}28 < 10$.

6. Завод отправил на базу n=100·(mod(m+N,3)+1) доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равна p=0,01·(mod(m,2)+1). Используя формулу Пуассона, найти вероятность того, что на базу прибудет ровно k=mod(m,5)+1 недоброкачественных изделия.

Приближенное значение вероятности найдем с помощью формулы Пуассона (1.5): $P_n(k) \approx \dfrac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$, где $\lambda = np$.

Для расчета значения $P_n(k)$ воспользуемся встроенной функцией MathCAD:

dpois(k, λ). (2.2.7)

$n := 100 \cdot (\mathrm{mod}(m + N, 3) + 1)$

$n = 100$

$p := 0.01 \cdot (\mathrm{mod}(m, 2) + 1)$

$p = 0.02$

$k := \mathrm{mod}(m, 5) + 1$

$k = 4$

$P := \mathrm{dpois}(k, n \cdot p)$

$P = 0.09$

Рис. 2.2.10 – Пример расчета вероятности по формуле Пуассона в MathCAD

7. Пусть область D ограничена линиями x = 0, x = 3, y = 0, y = 4,5. Область d дополнительно ограничена линиями $y = x \cdot \sqrt{9 - x^2}$ *и y = 0.*

Для расчета воспользуемся формулой геометрической вероятности (1.2): $P = \dfrac{mes\, d}{mes\, D}$, где *mes* – это мера области. Для двумерного случая мера – это площадь, поэтому будем искать вероятность по формуле $P = \dfrac{Sd}{SD}$.

Изобразим области *D* и *d* на графике.

$y1(x) := x \cdot \sqrt{9 - x^2}$

$y2(x) := 0$

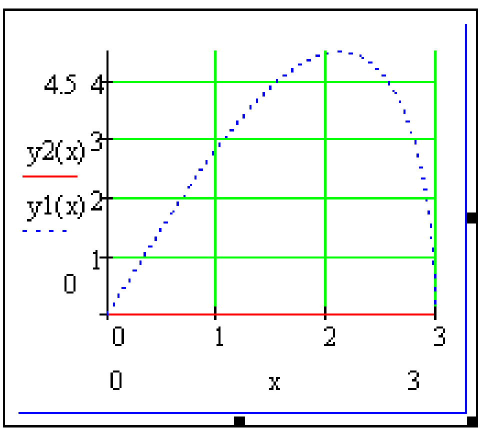

Рис. 2.2.11 – Области *D* и *d* в MathCAD

Выполним расчет площадей областей D и d.

Очевидно, что область D – это прямоугольник. Ее площадь равна произведению длин смежных сторон.

Область d – это криволинейная трапеция, ограниченная линиями $y = x \cdot \sqrt{9 - x^2}$ и $y = 0$. Чтобы вычислить площадь криволинейной трапеции, достаточно вычислить $\int\limits_0^3 x \cdot \sqrt{9 - x^2}\,dx$.

Для вычисления определенного интеграла в MathCAD воспользуемся кнопкой на панели «Исчисление» («Calculus»).

$$Sd := \int_0^3 y1(x) - y2(x)\,dx$$

$$Sd = 9$$

$$SD := (3 - 0)\cdot(4.5 - 0)$$

$$SD = 13.5$$

$$P := \frac{Sd}{SD}$$

$$P = 0.667$$

Рис. 2.2.12 – Пример расчета геометрической вероятности в MathCAD

Контрольные вопросы

1. Введите понятие размещения из n элементов по m, приведите формулу их общего числа.
2. Введите понятие перестановок из элементов n по m, приведите формулу их общего числа.
3. Введите понятие сочетаний из элементов n по m, приведите формулу их общего числа.
4. Определите понятие достоверных, невозможных и случайных событий. Приведите примеры.
5. Какие события называются совместными, несовместными? Какие события образуют полную группу событий?
6. Дайте классическое определение вероятности. Какими недостатками обладает такой подход?
7. Дайте геометрическое определение вероятности. В чем недостатки этого подхода?
8. Что называется повторными испытаниями?
9. Запишите формулу Бернулли.
10. Сформулируйте локальную и интегральную теоремы Лапласа.
11. Запишите формулу Пуассона.
12. В каких случаях в повторных испытаниях предпочтительней использовать приближенные формулы вычислений?

Библиографический список

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб пособие для вузов / В. Е. Гмурман. – 9-е изд., стер. – М.: Высш.шк., 2003. – 479 с.: ил.
2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. Пособие для студентов вузов / В.Е. Гмурман. – 9-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2004. – 404 с.: ил.
3. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. – 573 с.
4. Сборник задач по высшей математике. 2 курс / К.Н. Лунгу и др.; под ред. С.Н. Федина. – 6-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2007. – 592 с.: ил. – (Высшее образование).