МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ:
Проректор по учебной работе
________ О.Г.Локтионова
«____»________2013г.

Проверка статистических гипотез

Методические указания по выполнению
лабораторной работы № 17

Курск 2013

УДК 510 (083)

Составитель Е.В.Журавлева

Рецензент
Кандидат технических наук, доцент *Л.В. Карачевцева*

Проверка статистических гипотез: методические указания к выполнению лабораторной работы №17 / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Е.В. Журавлева. Курск, 2013. 39 с.: Библиогр.: с.18.

В данной работе содержатся краткие теоретические положения, необходимые для выполнения работы, методические указания по применению программного продукта EXCEL, рекомендуемые данные для статистической обработки.

Работа предназначена для студентов технических и экономических специальностей.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать _______ . Формат 60х84 1/16.
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. .Тираж ____экз. Заказ. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94

Содержание

Цель работы: 1. Научиться строить доверительные интервалы для математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения.
2. Научиться проверять гипотезы о нормальном законе распределения, о равенстве средних и дисперсий, применяя пакет прикладных программ EXCEL.

Задание

1. Постройте доверительные интервалы для математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения.
2. Проверьте гипотезу о нормальном законе распределения для изучаемой выборочной совокупности.
3. Разбейте исходные данные на две равные части и проверьте гипотезы о равенстве средних и дисперсий.

1 Основные теоретические положения

1.1 Интервальные оценки параметров распределения

Если числовая характеристика некоторого параметра распределения задана одним числом, то она называется точечной оценкой. В лабораторной работе №16 были рассмотрены точечные оценки некоторых характеристик распределения случайной величины X через характеристики выборки. Точечные оценки сами являются случайными величинами, законы которых зависят от закона распределения X и объема выборки n [2]. Чтобы дать представление о точности и надежности точечных оценок используют так называемые *доверительные интервалы* и *доверительные вероятности.*

Доверительным интервалом для некоторой характеристики Θ называют такой интервал $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, который с заранее выбранной вероятностью $\wp$ содержит истинное значение параметра Θ, т.е.

$$P\,(\varepsilon_1 < \Theta < \varepsilon_2) = \wp. \qquad (1.1)$$

Здесь $\wp$ называют доверительной вероятностью. Обычно значение $\wp$ выбирают близкое к единице : 0,9; 0,95; 0,99; 0,999. $\alpha = 1 - \wp$ называют уровнем значимости.

1.1.1 Построение доверительного интервала для математического ожидания

Если случайная величина X подчиняется нормальному закону распределения, то доверительный интервал для истинного значения x измеряемой величины может быть построен следующим образом.

Первый способ. Доверительная оценка при известной точности измерений (объем выборки большой $n \geq 100$).

Если заранее известно среднее квадратичное отклонение $\sigma = \sqrt{D}$ (или другая связанная с ней характеристика точности измерений), то доверительный интервал имеет вид

$$\bar{x} - t(\wp)\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < M[X] < \bar{x} + t(\wp)\frac{\sigma}{\sqrt{n}} , \qquad (1.2)$$

где n - объем выборки, $\bar{x}$ - среднее арифметическое, $t(\wp)$ определяется по заданной доверительной вероятности из условия [1,2]:

$$2\,\Phi(t) = \wp . \qquad (1.3)$$

Здесь $\Phi(t) = \int_0^t e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ - функция Лапласа, значения которой представлены в таблице приложения 1.

Второй способ. Доверительная оценка при неизвестной точности измерений.

Если среднее квадратичное отклонение σ заранее неизвестно, то вместо него используют эмпирическое отклонение. Известно [2], что статистика

$$T = \frac{x - \bar{x}}{S^*}\sqrt{n} . \qquad (1.4)$$

подчиняется закону Стьюдента с $f = n - 1$ степенями свободы. Исходя из этого , доверительный интервал в данном случае имеет вид [1,2]

$$\bar{x} - t(\wp, n-1)\frac{S^*}{\sqrt{n}} < M[X] < \bar{x} + t(\wp, n-1)\frac{S^*}{\sqrt{n}} . \qquad (1.5)$$

где $t(\wp, n - 1)$ зависит и от объема выборки. $t(\wp, n - 1)$ определяется из таблицы приложения 2.

1.1.2 Построение доверительного интервала для дисперсии и среднего квадратичного отклонения

Известно [2], что статистика

$$\chi^2 = \frac{(n-1)\cdot S^{*2}}{D[X]} = \frac{(n-1)\cdot S^{*2}}{\sigma^2} \qquad (1.6)$$

подчиняется закону распределения Пирсона или « χ - распределению » с $f = n - 1$ степенями свободы. Исходя из этого, доверительный интервал для дисперсии σ^2 случайной величины имеет вид [1,2]

$$\frac{(n-1)\cdot S^{*2}}{\chi_1^2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\cdot S^{*2}}{\chi_2^2} \qquad (1.7)$$

где $\chi_1{}^2$ и $\chi_2{}^2$ − значения, определяемые из таблиц для распределения Пирсона ([3] приложение 5) соответственно для вероятностей $\wp_1 = (1- \wp) / 2$ и $\wp_2 = (1 + \wp) / 2$ и числа степеней свободы $f = n - 1$.

Пусть $\gamma_1^2 = \frac{(n-1)}{\chi_1^2}$: $\gamma_2^2 = \frac{(n-1)}{\chi_2^2}$, тогда (2.24) примет вид

$$\gamma_1{}^2 \cdot S^{*2} < \sigma^2 < \gamma_2{}^2 \cdot S^{*2}, \qquad (1.8)$$

где значения γ^2 протабулированы для n и $\wp$ (приложение 4).

Для интервальной оценки среднего квадратичного отклонения служит неравенство

$$\gamma_1 \cdot S^* < \sigma < \gamma_2 \cdot S^* . \qquad (1.9)$$

1.2 Проверка статистических гипотез

1.2.1 Метод исключения грубых ошибок

Очень часто на практике встает вопрос о том, следует отвергнуть или нет некоторые результаты эксперимента, который резко выделяется среди остальных. Если значение варианта содержит грубую погрешность - промах, то наличие этого промаха может сильно исказить общее представление об исследуемой случайной величине. Обычно промах имеет значение резко отличающиеся от других измерений. Существенное отличие от значений других измерений не дает еще права исключить это измерение. Следует проверить гипотезу о наличии грубой ошибки.

Обозначим «выскакивающее» значение через x_* , а все остальные результаты через $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Согласно методу Романовского исследовано распределение статистики

$$t(\wp, n) = \frac{|x_* - \bar{x}|}{S^*} \tag{1.10}$$

и допустимые значения ее протабулированы (Приложение 5). Рассчитывают $t_{расч.}$ по формуле

$$t_{расч} = \frac{|x^* - \bar{x}|}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_1^N (x_i - \bar{x})^2}} \tag{1.11}$$

по желаемой надежности вывода $\wp$ при данном числе n приемлемых результатов по таблице приложения 5 находят критическое значение $t_{табл.}(\wp, n)$. Если

$$t_{расч.} > t_{табл.}, \tag{1.12}$$

то с надежностью вывода $\wp$ можно x_* исключить из дальнейшей обработки результатов, в противном случае достаточных оснований для исключения x_* нет. Выбор величины $\wp$ производится в зависимости от конкретных требований к результатам эксперимента и обычно принимается равным 0,95; 0,99; 0,999.

Если имеется несколько выделяющихся данных, необходимо определить $\bar{x}$ и S^* без этих данных, а затем оценить каждое из них по приведенной выше схеме.

Кроме рассмотренного метода исключения грубых ошибок известен метод Ирвина, Арлея, Грэббса.

Применять тот или иной метод следует осторожно, и там, где результаты эксперимента имеют принципиальное значение, целесообразно до применения статистических методов стремиться выяснить возможные причины появления резких отклонений в отдельных наблюдениях.

В дальнейшем выводы и конечные результаты делаются на основе данных, из которых исключены грубые ошибки.

1.2.2 Проверка гипотез о законе распределения

При исследовании случайной величины X , часто ставится вопрос о нахождении ее теоретического закона распределения, например, дифференциальной функции распределения f (x). По результатам выборки можно построить эмпирическое распределение f*(x) (геометрическим аналогом являются полигон и гистограмма относительных частот). Исходя из соображений, связанных с физикой величины X, с учетом характера полученной эмпирической кривой выбирают класс функций, содержащих некоторое число параметров. Ставится задача: найти те значения параметров, при которых соответствие между статистическим и теоретическим распределениями оказывается наилучшим. При этом обычно исходят из принципа наименьших квадратов [1,2], считая, что наилучшим приближением к эмпирической зависимости в данном классе функций является такое, при котором сумма квадратов отклонений обращается в минимум.

Сравнение эмпирического и теоретического распределений производится с помощью специально подобранной случайной величины (*статистики*) - *критерия согласия*. Известны критерии Пирсона (или χ^2 - « хи - квадрат »), Колмогорова, Смирнова, Романовского и другие.

Критерий согласия Пирсона χ^2 употребляется часто. Согласно этому критерию по результатам выборки строят интервальный вариационный ряд. Предполагая известным теоретический закон распределения f(x), рассчитывают вероятности p_i попадания случайной величины X в i - ый интервал (x_{i-1},x_i), где $i = 1,2, \ldots, \ell$. Здесь ℓ- число интервалов. В общем случае [2,3]

$$p_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx. \qquad (1.13)$$

В случае нормального распределения полагают [2,3]

$$f(x) = \frac{1}{S^*\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2S^{*2}}} \qquad (1.14)$$

тогда [1 - 3]

$$p_i = \Phi\left[\frac{x_i - \bar{x}}{S^*}\right] - \Phi\left[\frac{x_{i-1} - \bar{x}}{S^*}\right] \qquad (1.15)$$

Здесь Ф(t) - функция Лапласа (см. приложение 1.). Зная p_i, рассчитывают теоретическое число m_i' значений X, попавших в i - ый интервал по формуле

$$m_i' = np_i\ , \tag{1.16}$$

где n − объем выборки, $n = \sum_{j=1}^{\ell} m_j$.

Результаты расчетов сводят в таблицу.

Таблица 1.1 − Значения частот

Интервалы	(x_0,x_1)	(x_1,x_2)	. . .	$(x_{\ell-1},x_\ell)$
Эмпирические частоты (m_i)	m_1	m_2	. . .	m_ℓ
Теоретические частоты (m_i')	m_1'	m_2'	. . .	m_ℓ'

Известно [2,3] , что статистика

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{\ell} \frac{(m_i - m_i')^2}{m_i'} \tag{1.17}$$

при $n \to \infty$ имеет распределение χ^2 (см. приложение 3) с $f = \ell - r - 1$ степенями свободы (r − число параметров распределения f (x) , при нормальном распределении r = 2).

Замечание. Необходимым условием применения критерия Пирсона в случае нормального закона распределения является наличие в каждом из интервалов по меньшей мере 5 - 10 наблюдений. Если количество наблюдений в отдельных интервалах очень мало (порядка 1 − 2), то имеет смысл объединить некоторые интервалы.

По результатам табл.1.1 по формуле (1.17) вычисляют $\chi^2_{расч}$. По выбранной доверительной вероятности $\wp$ и числу степеней свободы $f = \ell - r - 1$ по таблице [3], приложения 5 находят $\chi^2_{табл}$.

Если

$$\chi^2_{расч} > \chi^2_{табл}, \tag{1.18}$$

то с надежностью вывода $\wp$ можно заключить, что эмпирическое распределение f* (x) отличается от теоретического f (x). В противном случае, для такого вывода нет достаточных оснований.

1.2.3 Сравнение средних

Целью эксперимента нередко бывает выявление различий между значениями определенного параметра в разных объектах исследования или при различных условиях. Для выяснения вопроса о случайном или неслучайном расхождении значений некоторого параметра X проводят две серии экспериментов (измерений) и для каждой из них подсчитывают значение параметра $\overline{x}_1$ и $\overline{x}_2$. Вопрос сводится к тому, когда считать разность между этими средними достаточно большой для того, чтобы иметь практическую уверенность в неслучайном происхождении обнаруженных различий.

Пусть величина X подчиняется нормальному закону, произведено n_1 измерений первой серии и n_2 - второй. Для решения вопроса подсчитывают

$$t_{расч} = \frac{\left|\overline{x}_1 - \overline{x}_2\right|}{\hat{S}\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}, \tag{1.19}$$

где

$$\hat{S} = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)\cdot S_1^{*2} + (n_2 - 1)\cdot S_2^{*2}}{n_1 + n_2 - 2}} \tag{1.20}$$

Здесь S_1^{*2} и S_2^{*2} – исправленные дисперсии для первой и второй серии.

По выбранной вероятности вывода $\wp$ и числу степеней свободы $f = n_1 + n_2 - 2$ из приложения 2 находят $t_{табл.}(\wp, f)$. Если

$$t_{расч.} > t_{табл.}, \tag{1.21}$$

то расхождение средних значений можно считать неслучайным (значимым) с надежностью вывода $\wp$. В противном случае нет оснований считать расхождение значимым.

1.2.4 Сравнение дисперсий

Гипотезы о дисперсиях имеют особенно большое значение в практике, так как измеряемая дисперсией величина рассеивания характеризует такие важные показатели, как точность машин и приборов, погрешность показаний измерительных приборов, точность технологического процесса и т.д.

Пусть случайная величина X подчиняется нормальному закону распределения и для нее получены две независимые выборки объемами n_1 и n_2. Пусть S_1^{*2} и S_2^{*2} - соответствующие выборочные дисперсии, причем $S_1^{*2} > S_2^{*2}$

Известно [3,4], что статистика

$$F = \frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{S_1^{*2} \cdot \frac{n_1}{\sigma^2}}{S_2^{*2} \cdot \frac{n_2}{\sigma^2}} = \frac{S_1^{*2}}{S_2^{*2}} \tag{1.22}$$

подчинена распределению Фишера (или F - распределению) с $k_1 = n_1 - 1$ и $k_2 = n_2 - 1$ степенями свободы. Поэтому для решения вопроса о случайном или неслучайном расхождении дисперсий рассчитывают их отношение

$$F_{расч} = \frac{S_1^{*2}}{S_2^{*2}} \tag{1.23}$$

затем, выбрав желаемую надежность вывода $\wp$ по таблице F - распределения (приложение 3) находят число $F_{табл.}(\wp, k_1, k_2)$. Если

$$F_{табл.} < F_{расч.}, \tag{1.24}$$

то расхождение дисперсий считают неслучайным (значимым) с надежностью вывода $\wp$. В противном случае для такого утверждения нет достаточных оснований.

1.3 Определение поля допуска по эмпирическому распределению

Во многих технологических процессах наблюдаются отклонения действительных значений параметров, характеризующих сам процесс, и параметров выпускаемой продукции.

Например, при изготовлении каких - либо деталей действительные размеры отклоняются от заданных.

Номинальный размер - размер, относительно которого определяются предельные размеры и который служит началом отсчета отклонений.

Предельные размеры - два предельно допустимых размера, между которыми должен находится действительный размер.

Допуск - разность между наибольшим и наименьшим предельными размерами. Допуск характеризует требуемую точность изготовления детали.

Многие эксперименты проводятся с целью определения поля допуска, которое характерно для данного технологического процесса и дает вероятность риска (брака) не более некоторого задаваемого числа. Значения t_1 и t_2 случайной величины X называют *практически предельными значениями* ее, если

$$\int_{t_1}^{t_2} f(x)dx = 1 - 2\beta, \tag{1.25}$$

f (x) − дифференциальная функция распределения для X , 2β - вероятность риска (брака). Обычно принимают 2β = 0,0027. *Практически предельное поле рассеивания* $2\delta = t_2 - t_1$, принимают за поле допуска, δ - половина поля допуска, $\Delta = (t_1 + t_2) / 2$ − координата середины поля допуска.

Замечание. Может оказаться, что заданное конструктором поле допуска не соответствует практически предельному полю рассеивания, т.е. вероятность риска (брака) не равна 2β. Если закон распределения для X известен - f (x) , т.е. известны M[x] и D[x], то поле допуска определяется исходя из формулы (1.25). Часто на практике априори (до опыта) теоретические значения параметров распределения неизвестны, а имеется лишь возможность получить из выборки их точечные оценки $\overline{x}$ и S^{*2}.

Если закон распределения для X предполагается нормальным, то поле допуска можно определить лишь с некоторой доверительной вероятностью $\wp$, как ($\overline{x} - \ell S^*$, $\overline{x} + \ell S^*$), где значение ℓ в зависимости от объема выборки n, (1 − 2β) и $\wp$ протабулированы (см. приложение 6).

Пример 6. Пусть в результате замера некоторого параметра n = 200 деталей получили $\overline{x} = -0{,}0282$, $S^* = 0{,}0515$.Определить поле допуска 2δ. Задаемся надежностью определения допуска, положим, что $\wp = 0{,}9$. Задаемся вероятностью риска (брака), пусть 2β = 0,0027, тогда 1 − 2β = 0,9973. По таблице приложения 6 $\ell = 3{,}40$, следовательно:

$$t_1 = \overline{x} - \ell S^* = -0{,}0282 - 0{,}515 \cdot 3{,}4 = -0{,}2033,$$
$$t_2 = \overline{x} + \ell S^* = -0{,}0282 + 0{,}515 \cdot 3{,}4 = 0{,}1469$$

Отсюда $2\delta = 0,3502$, $\Delta = -0,0282$, $\delta = 0,1751$.

Таким образом, если за поле допуска брать величину $2\delta = 0,3502$, то с вероятностью $\wp = 0,9$ из всех будущих наблюдений 99,73% будут лежать в промежутке (− 0,2033, 0,1469).

2 Порядок выполнения лабораторной работы

Используем результаты выполнения лабораторной работы №16 в качестве исходных данных берем значения столбца «Затраты на производство продукции».

1. Доверительный интервал для математического ожидания находим по формуле:

$$\bar{x} - t(P, n-1) \cdot \frac{S^*}{\sqrt{n}} < M[x] < \bar{x} + t(P, n-1) \cdot \frac{S^*}{\sqrt{n}}.$$

Для изучаемой выборочной совокупности: объем выборки $n = 30$, среднее выборочное $\bar{x} = 36,65037$, среднее квадратическое отклонение $S^* = 11,33477$.Для доверительной вероятности $P = 0,99$ квантиль распределения Стьюдента $t(0,99;29) = 2,76$ (см. табл. приложения или в свободной ячейке введем = СТЬЮДРАСПОБР (0,01;29)).

В ячейках A1−B4 введены эти данные, а в ячейках F4−F5 вычислены границы интервала для математического ожидания (см. рис. 1 и 2). Итак, $30,9387 < M[x] < 42,3620$.

Доверительные интервалы для дисперсии и среднего квадратического отклонения находим по формулам:

$$\gamma_1^2 \cdot S^{*2} < \sigma^2 < \gamma_2^2 \cdot S^{*2},$$

$$\gamma_1 \cdot S^* < \sigma < \gamma_2 \cdot S^*.$$

Для доверительной вероятности $P = 0,99$ и числа степеней свободы $f = 29$ находим табличные значения $\gamma_1^2 = 0,554$ и $\gamma_2^2 = 2,21$ (см.табл. приложения).

В ячейках A5−B9 введены необходимые данные, а в ячейках G4−H5 определены границы интервалов для дисперсии и среднего квадратического отклонения (рис.1 и 2). Таким образом, $71,1763 < \sigma^2 < 282,6494$ и $8,4366 < \sigma < 16,8122$.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	n=	30						
2	x_c=	36,65037				Доверительные интервалы для		
3	S*=	11,33477				мат.ожид.	дисперсии	сред.кв.откл.
4	t=	2,76		начало интервала		=B2-B4*B3/КОРЕНЬ(B1)	=B5*B6	=B8*B3
5	S^{*2}=	128,477		конец интервала		=B2+B4*B3/КОРЕНЬ(B1)	=B5*B7	=B9*B3
6	Y_1^2=	0,554						
7	Y_2^2=	2,2						
8	Y_1=	=КОРЕНЬ(B6)						
9	Y_2=	=КОРЕНЬ(B7)						
10								

Рисунок 1 – Формульный шаблон расчета доверительных интервалов

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	n=	30								
2	x_c=	36,65037				Доверительные интервалы для				
3	S*=	11,33477				мат.ожид.	дисперсии	сред.кв.откл.		
4	t=	2,76		начало интервала		30,9387	71,1763	8,4366		
5	S^{*2}=	128,477		конец интервала		42,3620	282,6494	16,8122		
6	Y_1^2=	0,554								
7	Y_2^2=	2,2								
8	Y_1=	0,7443118								
9	Y_2=	1,4832397								
10										

Рисунок 2 – Расчет доверительных интервалов

2. Проверим гипотезу о нормальном законе распределения для изучаемой выборочной совокупности. Сравнение эмпирического (интервального ряда) с теоретическим (нормальным) распределением производим согласно критерию Пирсона. Для этого рассчитаем вероятности попадания нормальной случайной величины в каждый из полученных интервалов (x_{i-1}, x_i) по формуле:

$$P_i = \Phi\left(\frac{x_i - \bar{x}}{S^*}\right) - \Phi\left(\frac{x_{i-1} - \bar{x}}{S^*}\right).$$

Зная P_i, рассчитываем теоретические частоты $m_i' = P_i \cdot n$ и значение критерия:

$$\chi^2 = \sum \frac{(m_i - m_i')^2}{m_i'}.$$

Вычисления производим в таблице (рис.3 и 4). В первом столбце указаны концы интервалов, при расчете значений функции Лапласа используем встроенную статистическую функцию НОРМРАСП(x) с параметрами: среднее = 0, стандартное отклонение = 1, интегральный =1.

	A	B	C	D	E	F	G	H
13	x_i	$(x_i-x_c)/S^*$	Ф	P_i	m_i'	m_i	m_i-m_i'	$(m_i-m_i')^2/m_i'$
14	13,628	=(A14-36,65)/11,335	=НОРМРАСП(B14;0;1;1)-0,5	-	-	-	-	-
15	=A14+7,678	=(A15-36,65)/11,335	=НОРМРАСП(B15;0;1;1)-0,5	=C15-C14	=D15*30	3	=F15-E15	=G15*G15/E15
16	=A15+7,678	=(A16-36,65)/11,335	=НОРМРАСП(B16;0;1;1)-0,5	=C16-C15	=D16*30	4	=F16-E16	=G16*G16/E16
17	=A16+7,678	=(A17-36,65)/11,335	=НОРМРАСП(B17;0;1;1)-0,5	=C17-C16	=D17*30	11	=F17-E17	=G17*G17/E17
18	=A17+7,678	=(A18-36,65)/11,335	=НОРМРАСП(B18;0;1;1)-0,5	=C18-C17	=D18*30	4	=F18-E18	=G18*G18/E18
19	=A18+7,678	=(A19-36,65)/11,335	=НОРМРАСП(B19;0;1;1)-0,5	=C19-C18	=D19*30	4	=F19-E19	=G19*G19/E19
20	=A19+7,678	=(A20-36,65)/11,335	=НОРМРАСП(B20;0;1;1)-0,5	=C20-C19	=D20*30	4	=F20-E20	=G20*G20/E20
21	сумма	-	-	=СУММ(D15:	=СУММ(E1	=СУММ(F15	=СУММ(G15:	=СУММ(H15:H20
22								

Рисунок 3 – Формульный шаблон расчета значения $\chi^2_{\text{расч}}$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
13	x_i	$(x_i-x_c)/S^*$	Ф	P_i	m_i'	m_i	m_i-m_i'	$(m_i-m_i')^2/m_i'$	
14	13,628	-2,0311	-0,4789	-	-	-	-	-	
15	21,306	-1,3537	-0,4121	0,0668	2,0038	3,0000	0,9962	0,4952	
16	28,984	-0,6763	-0,2506	0,1615	4,8451	4,0000	-0,8451	0,1474	
17	36,662	0,0011	0,0004	0,2510	7,5300	11,0000	3,4700	1,5990	
18	44,340	0,6784	0,2513	0,2508	7,5248	4,0000	-3,5248	1,6511	
19	52,018	1,3558	0,4124	0,1612	4,8351	4,0000	-0,8351	0,1442	
20	59,696	2,0332	0,4790	0,0666	1,9969	4,0000	2,0031	2,0093	
21	сумма	-	-	0,9579	28,7357	30,0000	1,2643	6,0463	
22									

Рисунок 4 – Расчет значения $\chi^2_{\text{расч}}$

Таким образом, $\chi^2_{\text{расч}} = 6{,}0463$.

Определяем число степеней свободы по формуле $f = \ell - r - 1$, здесь $\ell = 6$ – число интервалов, $r = 2$ – число параметров нормального распределения (математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение). Тогда для $f = 6 - 2 - 1 = 3$ и доверительной вероятности $P = 0{,}99$ находим табличное значение $\chi^2_{\text{табл}}(0{,}99;3) = 11{,}3$ (см.табл. [3] приложения 5 или в свободной ячейке введем $=$ ХИ2ОБР(0,01;3)).

Так как $\chi^2_{\text{расч}} < \chi^2_{\text{табл}}$, расхождение эмпирических и теоретических частот незначимое, т.е. данные по затратам на производство продукции подчиняются нормальному распределению.

3. Для технических специальностей рекомендуется в качестве второго ряда взять дополнительные значения из таблиц приложений согласно варианту. Для экономических специальностей рекомендуется разбить исходные данные.

Разобьем исходные данные (затраты на производство) на две равные части, получим два дискретных ряда, для каждого из рядов рассчитаем числовые характеристики. Для этого воспользуемся пакетом «Анализ данных», расположенном в меню «Сервис», и его надстройкой «Описательная статистика». Вывод числовых характеристик можно осуществить на этом же листе, для этого в окошке

«Входной интервал» указываем диапазон ячеек первого дискретного ряда, в подзаголовке «Параметры вывода» отмечаем метками «Выходной интервал», «Итоговая статистика», «Уровень надежности». В окошке «Выходной интервал» указываем диапазон ячеек A44−B54, куда будут выведены числовые характеристики для первого дискретного ряда (рис.5). Аналогично, в ячейках D44−E54 будут выведены числовые характеристики для второго дискретного ряда.

Итак, $n_1 = 15$, $n_2 = 15$, $\overline{x_1} = 35{,}8842$, $\overline{x_2} = 37{,}4165$, $S_1^{*2} = 148{,}8942$, $S_2^{*2} = 115{,}9788$.

	A	B	C	D	E	F	G
24	x_{1i}	x_{2i}					
25	31,355	32,126					
26	21,224	43,814					
27	39,263	34,72					
28	48,304	45,087					
29	34,646	16,752					
30	23,931	27,494					
31	58,98	33,639					
32	44,876	46,802					
33	34,248	24,99					
34	26,476	36,642					
35	35,459	55,554					
36	52,114	35,402					
37	42,906	55,189					
38	30,853	31,259					
39	13,628	41,778					
40							
41							
42	*Столбец1*			*Столбец1*			
43							
44	Среднее	35,8842		Среднее	37,4165		
45	Стандартная ошибка	3,1506		Стандартная ошибка	2,7806		
46	Медиана	34,6460		Медиана	35,4020		
47	Мода	#Н/Д		Мода	#Н/Д		
48	Стандартное отклонение	12,2022		Стандартное отклонение	10,7693		
49	Дисперсия выборки	148,8942		Дисперсия выборки	115,9788		
50	Эксцесс	-0,2614		Эксцесс	-0,1776		
51	Асимметричность	0,1216		Асимметричность	0,0673		
52	Интервал	45,3520		Интервал	38,8020		
53	Минимум	13,6280		Минимум	16,7520		
54	Максимум	58,9800		Максимум	55,5540		

Лист1 / Лист4 / Лист2 / Лист3

Рисунок 5 –Дискретные ряды и вывод их числовых характеристик

Проверим гипотезу о равенстве средних. Для этого найдем

$$t_{расч} = \frac{\left|\overline{x}_1 - \overline{x}_2\right|}{\hat{S} \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}},$$

где
$$\hat{S} = \sqrt{\frac{(n_1 - 1) \cdot S_1^{*2} + (n_2 - 1) \cdot S_2^{*2}}{n_1 + n_2 - 2}}.$$

В ячейках A60−B63, A65−B66 введены необходимые данные, в ячейках B64, B67 рассчитаны значения $\hat{S}$ и $t_{расч}$ (рис. 6 и 7).

Для доверительной вероятности $P = 0{,}99$ и числа степеней свободы $f = n_1 + n_2 - 2 = 15 + 15 - 2 = 28$ находим $t_{табл}(0{,}99;28) = 2{,}77$.

Так как $t_{расч} < t_{табл}$, то расхождение средних можно считать незначительным.

	A	B	C	D
60	n_1=	15		
61	n_2=	15		
62	$S^*{}_1{}^2$=	=B49		
63	$S^*{}_2{}^2$=	=E49		
64	S^=	=КОРЕНЬ(((B60-1)*B62+(B61-1)*B63)/(B60+B61-2))		
65	x_1=	=B44		
66	x_2=	=E44		
67	$t_{расч}$=	=(B66-B65)/B64/КОРЕНЬ(1/B60+1/B61)		
68	$F_{расч}$=	=B62/B63		
69				
70				

Рисунок 6 – Формульный шаблон расчета значений $t_{расч}$ и $F_{расч}$

	A	B	C	D	E	F	G	H
58								
59								
60	n_1=	15						
61	n_2=	15						
62	$S^*{}_1{}^2$=	148,894						
63	$S^*{}_2{}^2$=	115,979						
64	S^=	11,508						
65	x_1=	35,884						
66	x_2=	37,417						
67	$t_{расч}$=	0,365						
68	$F_{расч}$=	1,284						
69								
70								

Рисунок 7 – Расчет значений $t_{расч}$ и $F_{расч}$

Табличное значение можно найти по таблице приложения 2 или в свободной ячейке ввести = СТЬЮДРАСПОБР (0,01;28).

Проверим гипотезу о равенстве дисперсий. Для этого находим $F_{расч} = \frac{S_1^2}{S_2^2}$, где $S_1^2 = \max\{S_1^{*2}, S_2^{*2}\}$, $S_2^{*2} = \min\{S_1^{*2}, S_2^{*2}\}$.

В нашем случае $S_1^{*2} > S_2^{*2}$, следовательно, $S_1^2 = S_1^{*2}$, $S_2^2 = S_2^{*2}$. В ячейке B68 рассчитана величина $F_{расч} = 1{,}284$. Для доверительной вероятности 0,99 табличное значение $F_{табл}(0{,}99;14;14) = 3{,}63$.

Так как $F_{расч} < F_{табл}$, то расхождение дисперсий можно считать незначимым.

Табличное значение можно найти по таблице F−распределения приложения 6 или в свободной ячейке ввести = FРАСПОБР (0,01;14;14).

Список рекомендуемой литературы

1. Вентцель Е. С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и её инженерные приложения. М.:1986.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высш. шк., 2007.
3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высш. шк., 2007.
4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т.2. −М.: Интеграл-Пресс, 2003.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Значение функции $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0753
0.2	0793	0832	0871	0909	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0.3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0.4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0.5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0.6	2257	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2517	2549
0.7	2580	2611	2642	2673	2703	2734	2764	2794	2823	2852
0.8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3079	3106	3133
0.9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3316	3340	3365	3389
1.0	3413	3438	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1.1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1.2	3849	3869	3883	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1.3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1.4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1.5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4429	4441
1.6	4452	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1.7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1.8	4641	4649	4656	4684	4671	4678	4686	4693	4699	4706
1.9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4761	4767
2.0	4772	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4812	4817
2.1	4821	4826	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857
2.2	4861	4865	4868	4871	4875	4878	4881	4884	4887	4890

Продолжение приложения 1.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	4918	4920	4922	4925	4927	4929	4931	4932	4934	4936
2.5	4938	4940	4941	4943	4945	4946	4948	4949	4951	4952
2.6	4953	4955	4956	4957	4959	4960	4961	4962	4963	4964
2.7	4965	4966	4967	4968	4969	4970	4971	4972	4973	4974
2.8	4974	4975	4976	4977	4977	4978	4979	4979	4980	4981
2.9	4981	4982	4982	4983	4984	4984	4985	4985	4986	4986

t	Φ(t)	t	Φ(t)
3.00	0.49865	3.6	0.49984
3.10	49903	3.7	49989
3.20	49931	3.8	49993
3.30	49952	3.9	49995
3.40	49966	4.0	49997
3.50	49977	5.0	4999997

Приложение 2

Значения t($\wp$,n-1) распределения Стьюдента

$\wp$ / n-1	0,90	0,95	0,99	0,999	$\wp$ / n-1	0,90	0,95	0,99	0,999
1	6.31	12.70	63.70	636.60	32	1.69	2.04	2.74	3.62
2	2.92	4.30	9.92	31.60	34	1.69	2.03	2.73	3.60
3	2.35	3.18	5.84	12.90	36	1.69	2.03	2.72	3.58
4	2.13	2.78	4.60	8.61	38	1.69	2.02	2.71	3.57
5	2.02	2.57	4.03	6.87	40	1.68	2.02	2.70	3.55
6	1.94	2.45	3.71	5.96	42	1.68	2.02	2.70	3.54
7	1.89	2.36	3.50	5.41	44	1.68	2.02	2.69	3.53
8	1.86	2.31	3.36	5.04	46	1.68	2.01	2.69	3.52
9	1.83	2.26	3.25	4.78	48	1.68	2.01	2.68	3.51
10	1.81	2.23	3.17	4.59	50	1.68	2.01	2.68	3.50
11	1.80	2.20	3.11	4.44	55	1.67	2.00	2.67	3.48
12	1.78	2.18	3.05	4.32	60	1.67	2.00	2.66	3.46
13	1.77	2.16	3.01	4.22	65	1.67	2.00	2.66	3.45
14	1.76	2.14	2.98	4.14	70	1.67	1.99	2.65	3.44
15	1.75	2.13	2.95	4.07	80	1.66	1.99	2.64	3.42
16	1.75	2.12	2.92	4.04	90	1.66	1.99	2.63	3.40
17	1.74	2.11	2.90	3.97	100	1.66	1.98	2.63	3.39
18	1.73	2.10	2.83	3.92	120	1.66	1.98	2.62	3.37
19	1.73	2.09	2.86	3.88	150	1.66	1.98	2.61	3.36
20	1.72	2.09	2.85	3.85	200	1.65	1.97	2.60	3.34
21	1.72	2.08	2.83	3.82	250	1.65	1.97	2.60	3.33
22	1.72	2.07	2.82	3.79	300	1.65	1.97	2.59	3.32
23	1.71	2.07	2.81	3.77	400	1.65	1.97	2.59	3.32
24	1.71	2.06	2.80	3.75	500	1.65	1.96	2.59	3.31
25	1.71	2.06	2.79	3.73	∞	1.65	1.96	2.58	3.29
26	1.71	2.06	2.78	3.71					
27	1.70	2.05	2.77	3.69					
28	1.70	2.05	2.76	3.67					
29	1.70	2.05	2.76	3.66					
30	1.70	2.04	2.75	3.65					

Приложение 3

Значение F - распределение

($\wp$ =0.95 - верхняя строка, $\wp$ = 0.99 - нижняя строка)

k_1 k_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	154 4052	200 4999	216 5403	225 5625	230 5764	234 5859	237 5928	239 5981	241 6022	242 6056
2	18.51 98.49	19.00 99.01	19.16 99.17	19.25 99.25	19.30 99.30	19.33 99.33	19.36 99.94	19.37 99.36	19.38 99.38	19.39 99.40
3	10.13 34.12	9.55 30.81	9.28 29.46	9.12 28.71	9.01 28.24	8.94 27.91	8.88 27.67	8.84 27.29	8.81 27.34	8.78 27.23
4	7.71 21.20	6.94 18.00	6.59 16.69	6.39 15.98	6.26 15.52	6.16 15.51	6.09 14.98	6.04 14.80	6.00 14.66	5.96 14.54
5	6.61 16.26	5.79 13.27	5.41 12.06	5.19 11.39	5.05 10.97	4.95 10.67	4.88 10.45	4.82 10.27	4.78 10.15	4.74 10.05
6	5.99 13.74	5.14 10.92	4.76 9.78	4.53 9.15	4.39 8.75	4.28 8.47	4.21 8.26	4.15 8.10	4.10 7.98	4.06 7.87
7	5.59 12.25	4.74 9.55	4.35 8.45	4.12 7.85	3.97 7.46	3.87 7.19	3.79 7.00	3.73 6.84	3.68 6.71	3.63 6.62
8	5.32 11.26	4.46 8.65	4.07 7.59	3.84 7.01	3.69 6.63	3.58 6.37	3.50 6.19	3.44 6.03	3.39 5.91	3.34 5.82
9	5.12 10.56	4.26 8.02	3.86 6.99	3.63 6.42	3.48 6.06	3.37 5.80	3.29 5.62	3.23 5.47	3.18 5.35	3.13 5.26
10	4.96 10.04	4.10 7.56	3.71 6.55	3.48 5.99	3.33 5.64	3.22 5.39	3.14 5.21	3.07 5.06	3.02 4.95	2.97 4.85
15	4.54 8.68	3.68 6.36	3.29 5.42	3.06 4.89	2.90 4.56	2.79 4.32	2.70 4.14	2.64 4.00	2.59 3.89	2.55 3.80
20	4.35 8.10	3.49 5.85	3.10 4.94	2.87 4.43	2.71 4.10	2.60 3.87	2.52 3.71	2.45 3.56	2.40 3.45	2.35 3.37
30	4.17 7.56	3.62 5.39	2.92 4.51	2.69 4.02	2.53 3.70	2.42 3.47	2.34 3.30	2.27 3.17	2.21 3.06	3.16 2.98
50	4.03 7.17	3.18 5.06	2.79 4.20	2.56 3.72	2.40 3.41	2.29 3.18	2.20 3.02	2.13 2.88	2.07 2.78	2.02 2.70
100	3.94 6.90	3.09 4.82	2.70 3.98	2.46 3.51	2.30 3.20	2.19 2.99	2.10 2.82	2.03 2.69	1.97 2.59	1.92 2.51
∞	3.84 6.64	2.99 4.60	2.60 3.78	2.37 3.32	2.21 3.02	2.09 2.80	2.01 2.64	1.94 2.51	1.88 2.41	1.83 2.32

Продолжение приложения 3

k_1 / k_2	11	12	14	16	20	24	30	50	100	∞
1	243 6082	244 6106	245 6142	246 6169	248 6208	249 6234	250 6258	252 6258	253 6302	254 6366
2	19.40 99.41	19.41 99.42	19.42 99.43	19.43 99.44	19.44 99.45	19.45 99.46	19.46 99.47	19.47 99.48	19.49 99.48	19.50 99.50
3	8.76 27.13	8.74 27.05	8.71 26.92	8.69 26.83	8.66 26.69	8.64 26.60	8.62 26.50	8.58 26.27	8.56 26.23	8.53 26.12
4	5.93 14.45	5.91 14.37	5.87 14.24	5.84 14.15	5.80 14.02	5.77 13.93	5.74 13.83	5.70 13.69	5.66 13.57	5.63 13.46
5	4.70 9.96	4.68 9.89	4.64 9.77	4.60 9.68	4.56 9.55	4.53 9.47	4.50 9.38	4.46 9.24	4.40 9.13	4.36 9.02
6	4.03 7.79	4.00 7.72	3.39 7.60	3.92 7.52	3.87 7.39	3.84 7.31	3.81 7.23	3.75 7.09	3.71 7.99	3.67 6.88
7	3.60 6.54	3.57 6.47	3.52 6.35	3.49 6.27	3.44 6.15	3.41 6.07	3.38 5.98	3.32 5.85	3.28 5.75	3.23 5.65
8	3.31 5.74	3.28 5.67	3.23 5.56	3.20 5.48	3.15 5.36	3.12 5.28	3.08 5.20	3.03 5.06	2.98 4.96	2.93 4.86
9	3.10 5.18	3.07 5.11	3.02 5.00	2.98 4.92	2.93 4.80	2.90 4.73	2.86 4.64	2.80 4.51	2.76 4.41	2.71 4.31
10	2.94 4.78	2.91 4.71	2.86 4.60	2.82 4.52	2.77 4.41	2.74 4.33	2.70 4.25	2.64 4.12	2.59 4.01	2.54 3.91
15	2.51 3.73	2.48 3.67	2.43 3.56	2.39 3.48	2.33 3.36	2.39 3.29	2.25 3.20	2.18 3.07	2.12 2.97	2.07 2.87
20	2.31 3.30	2.28 3.23	2.23 3.13	2.18 3.05	2.12 2.94	2.08 2.86	2.04 2.77	1.96 2.63	1.90 2.53	1.84 2.42
30	2.12 2.90	2.09 2.84	2.04 2.74	1.99 2.66	1.93 2.55	1.89 3.47	1.84 2.38	1.76 2.34	1.69 2.13	1.62 2.01
50	1.98 2.62	1.95 2.56	1.90 2.46	1.85 2.39	1.78 2.26	1.74 2.18	1.69 2.10	1.60 1.94	1.52 1.82	1.44 1.68
100	1.88 2.43	1.85 2.36	1.79 2.26	1.75 2.19	1.68 2.06	1.63 1.98	1.57 1.89	1.48 1.73	1.39 1.59	1.28 1.43
∞	1.79 2.24	1.75 2.13	1.69 2.07	1.64 1.99	1.57 1.87	1.52 1.79	1.46 1.79	1.36 1.52	1.24 1.36	1.00 1.00

Приложение 4

Значения γ_1^2 и γ_2^2, определяющие доверительный интервал для дисперсии

f = n - 1	$\wp$ = 0.90		$\wp$ = 0.95		$\wp$ = 0.99	
	γ_1^2	γ_2^2	γ_1^2	γ_2^2	γ_1^2	γ_2^2
1	2	3	4	5	6	7
1	0.260	254	0.199	1018	0.127	25464
2	0.334	19.5	0.271	39.5	0.189	199
3	0.384	8.53	0.321	13.9	0.234	41.8
4	0.422	5.63	0.359	8.26	0.269	19.3
5	0.452	4.36	0.390	6.02	0.299	12.1
6	0.476	3.67	0.415	4.85	0.324	8.88
7	0.498	3.23	0.437	4.14	0.345	7.08
8	0.516	2.93	0.456	3.67	0.364	5.96
9	0.532	2.71	0.473	3.33	0.382	5.19
10	0.546	2.54	0.488	3.08	0.397	4.64
11	0.559	2.40	0.502	2.88	0.411	4.23
12	0.571	2.30	0.514	2.72	0.424	3.90
13	0.581	2.21	0.526	2.60	0.436	3.65
14	0.591	2.13	0.536	2.49	0.447	3.44
15	0.600	2.07	0.546	2.40	0.457	3.26
16	0.608	2.01	0.555	2.32	0.467	3.11
17	0.616	1.96	0.563	2.25	0.476	2.98
18	0.624	1.92	0.571	2.19	0.484	2.87
19	0.630	1.88	0.578	2.13	0.492	2.78
20	0.637	1.84	0.585	2.08	0.500	2.69
21	0.643	1.81	0.592	2.04	0.507	2.61
22	0.648	1.78	0.598	2.00	0.514	2.55
23	0.654	1.76	0.604	1.97	0.521	2.48
24	0.659	1.73	0.610	1.94	0.527	2.43
25	0.664	1.71	0.615	1.91	0.533	2.38
26	0.669	1.69	0.620	1.88	0.538	2.33
27	0.673	1.67	0.625	1.85	0.544	2.29
28	0.677	1.65	0.630	1.83	0.549	2.25
29	0.681	1.64	0.634	1.81	0.554	2.21
30	0.685	1.62	0.639	1.79	0.559	2.18
31	0.689	1.61	0.643	1.77	0.564	2.14
32	0.693	1.59	0.647	1.75	0.568	2.11
33	0.696	1.58	0.651	1.73	0.572	2.09
34	0.700	1.57	0.654	1.72	0.577	2.06
35	0.703	1.56	0.658	1.70	0.581	2.04
36	0.706	1.55	0.661	1.69	0.585	2.01

Продолжение приложения 4

1	2	3	4	5	6	7
37	0.709	1.54	0.665	1.67	0.588	1.99
38	0.712	1.53	0.668	1.66	0.592	1.97
39	0.715	1.52	0.671	1.65	0.596	1.95
40	0.717	1.51	0.674	1.64	0.599	1.93
41	0.720	1.50	0.677	1.63	0.602	1.91
42	0.723	1.49	0.680	1.62	0.606	1.90
43	0.725	1.48	0.683	1.61	0.609	1.88
44	0.728	1.48	0.685	1.60	0.612	1.87
45	0.730	1.47	0.688	1.59	0.615	1.85
46	0.732	1.46	0.691	1.58	0.618	1.84
47	0.734	1.46	0.693	1.57	0.621	1.82
48	0.737	1.45	0.695	1.56	0.624	1.81
49	0.739	1.44	0.698	1.55	0.626	1.80
50	0.741	1.44	0.700	1.55	0.629	1.79
51	0.743	1.43	0.702	1.54	0.632	1.77
52	0.745	1.43	0.705	1.53	0.634	1.76
53	0.747	1.42	0.707	1.52	0.637	1.75
54	0.748	1.42	0.708	1.52	0.639	1.74
55	0.750	1.41	0.711	1.51	0.641	1.73
56	0.752	1.41	0.713	1.50	0.644	1.72
57	0.754	1.40	0.715	1.50	0.646	1.71
58	0.755	1.40	0.717	1.49	0.648	1.71
59	0.757	1.39	0.718	1.49	0.650	1.70
60	0.759	1.39	0.720	1.48	0.653	1.69
62	0.762	1.38	0.724	1.47	0.657	1.67
64	0.765	1.37	0.727	1.46	0.661	1.66
66	0.768	1.37	0.730	1.45	0.664	1.64
68	0.771	1.36	0.734	1.44	0.668	1.63
70	0.773	1.35	0.737	1.44	0.672	1.62
72	0.776	1.35	0.740	1.43	0.675	1.61
74	0.778	1.34	0.742	1.42	0.678	1.59
76	0.781	1.34	0.745	1.41	0.682	1.58
78	0.783	1.33	0.748	1.41	0.685	1.57
80	0.785	1.32	0.750	1.40	0.688	1.56
82	0.787	1.32	0.753	1.39	0.691	1.55
84	0.790	1.32	0.755	1.39	0.693	1.54
86	0.792	1.31	0.757	1.38	0.696	1.54
88	0.794	1.31	0.760	1.38	0.699	1.53
90	0.795	1.30	0.762	1.37	0.701	1.52

Приложение 5

Значение t(℘,n) для грубых ошибок по методу Романовского

n	℘		
	0.95	0.99	0.999
2	15.56	77.96	779.70
3	4.97	11.46	36.49
4	3.56	6.53	14.47
5	3.04	5.04	9.43
6	2.78	4.36	7.41
7	2.62	3.96	6.37
8	2.51	3.71	5.73
9	2.43	3.54	5.31
10	2.37	3.41	5.01
11	2.33	3.31	4.79
12	2.29	3.23	4.62
13	2.26	3.17	4.48
14	2.24	3.12	4.37
15	2.22	3.08	4.28
16	2.20	3.04	4.20
17	2.18	3.01	4.17
18	2.17	3.00	4.07
19	2.16	2.95	4.02
20	2.15	2.93	3.98
21	2.14	2.91	3.94
22	2.13	2.90	3.91
23	2.12	2.88	3.87
24	2.11	2.87	3.85
25	2.11	2.85	3.84
26	2.10	2.84	3.80
27	2.09	2.83	3.78
28	2.09	2.82	3.76
29	2.08	2.81	3.74
30	2.08	2.80	3.72
40	2.05	2.74	3.60
60	2.02	2.68	3.49
120	1.99	2.63	3.39
∞	1.96	2.58	3.29

Приложение 6

Значение *l* для определения гарантированного поля допуска

k=n-1	$\wp$ = 0.9			$\wp$ = 0.95			$\wp$ = 0.99		
	1 - 2β			1 - 2β			1 - 2β		
	0.9973	0.95	0.9	0.9973	0.95	0.9	0.9973	0.95	0.9
4	6.76	4.18	3.51	8.26	5.11	4.29	12.80	7.92	6.64
5	6.07	3.74	3.14	7.17	4.44	3.72	10.31	6.38	5.35
6	5.60	3.47	2.91	6.50	4.02	3.38	8.91	5.51	4.62
7	5.80	3.27	2.75	6.05	3.74	3.14	8.01	4.95	4.15
8	5.07	3.13	2.63	5.72	3.54	2.97	7.38	4.56	3.83
9	4.89	3.02	2.54	5.48	3.39	2.84	6.91	4.27	3.59
10	4.75	2.94	2.47	5.28	3.26	2.74	6.55	4.05	3.40
12	4.54	2.81	2.36	4.99	3.08	2.59	6.03	3.73	3.13
14	4.39	2.72	2.28	4.78	2.96	2.49	5.67	3.52	2.95
16	4.28	2.65	2.22	4.62	2.86	2.40	5.41	3.35	2.81
18	4.19	2.59	2.17	4.50	2.79	2.34	5.21	3.22	2.70
20	4.11	2.54	2.14	4.39	2.72	2.29	5.05	3.12	2.62
25	3.98	2.46	2.07	4.20	2.61	2.19	4.76	2.94	2.47
30	3.89	2.40	2.02	4.10	2.54	2.13	4.57	2.82	2.37
40	3.78	2.33	1.95	3.94	2.44	2.05	4.31	2.67	2.24
50	3.69	2.28	1.91	3.84	2.37	1.99	4.15	2.57	2.16
60	3.63	2.25	1.89	3.76	2.33	1.96	4.05	2.50	2.10
70	3.59	2.22	1.86	3.70	2.30	1.93	3.96	2.45	2.06
80	3.55	2.20	1.85	3.66	2.27	1.91	3.90	2.41	2.02
90	3.53	2.18	1.83	3.63	2.25	1.89	3.84	2.38	2.00
100	3.51	2.17	1.82	3.60	2.23	1.87	3.80	2.35	1.98
200	3.40	2.10	1.76	3.47	2.14	1.80	3.59	2.22	1.87
300	3.35	2.07	1.74	3.41	2.11	1.77	3.50	2.17	1.82
400	3.32	2.06	1.73	3.37	2.08	1.75	3.45	2.14	1.79
500	3.30	2.05	1.72	3.35	2.07	1.74	3.41	2.12	1.78
600	3.29	2.04	1.71	3.33	2.06	1.73	3.39	2.10	1.76
800	3.27	2.03	1.70	3.30	2.05	1.72	3.36	2.08	1.75
1000	3.26	2.02	1.70	3.29	2.04	1.71	3.33	2.07	1.74

Приложение 7

Рекомендуемые варианты для выполнения расчетов студентами технических специальностей

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Индивидуальные задания выбираются согласно варианту. В каждом варианте первый статистический ряд выбирается для первого кольца (из условий), второй ряд – для второго кольца лабораторной работы №16 из таблицы ниже.

ВАРИАНТЫ

вариант	ряды	вариант	ряды	вариант	ряды	вариант	ряды
1	1+25	2	2+26	3	3+27	4	4+28
5	5+29	6	6+30	7	7+31	8	8+32
9	9+33	10	10+34	11	11+35	12	12+36
13	13+27	14	14+38	15	15+39	16	16+40
17	17+41	18	18+42	19	19+43	20	20+44
21	21+45	22	22+46	23	23+47	24	24+48
25	25+49	26	26+50	27	27+51	28	28+52
29	29+53	30	30+54	31	31+55	32	32+56

Таблица П1 – Значения параметры колец после токарной обработки **(2-ое кольцо)**

	D нар		*D* ж		*d*		*H*		*h*		*h′*	
	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
	min	max	min	max	min	max	min	max	min	max	min	max
1	8	9	6	6	-10	-11	4	5	-2	-2	26	27
2	8	9	9	10	-12	-14	4	5	-1	2	27	28
3	9	10	8	9	-11	-13	4	6	-2	-2	26	27
4	8	9	8	9	-10	-12	3	5	-2	-3	27	28
5	11	13	8	9	-10	-12	5	7	-1	-2	27	28
6	11	12	7	8	-8	-10	4	5	-1	-2	27	28
7	8	10	10	12	-11	-13	3	5	-1	-1	28	30
8	13	14	6	7	-11	-12	4	6	-2	-2	29	30
9	16	17	4	6	-9	-10	4	6	-1	-1	27	28
10	15	16	4	5	-12	-14	3	5	-1	-1	27	28
11	13	14	8	9	-11	-13	4	5	-2	-2	29	30
12	14	15	9	10	-12	-12	5	6	-1	-2	28	30
13	14	15	8	10	-12	-14	4	7	-1	-2	27	28
14	14	16	9	10	-10	-12	9	10	-1	-2	30	31
15	17	18	10	11	-11	-12	9	10	-1	-1	27	28
16	14	15	8	9	-11	-13	18	19	-1	-2	30	33
17	13	15	12	13	-12	-13	8	10	-1	-1	30	31
18	14	15	8	10	-12	-14	8	10	-1	-1	30	31
19	13	13	14	14	-6	-11	8	9	-1	-1	29	29
20	12	13	15	16	-10	-12	9	10	-1	0	30	31
21	14	15	8	9	-10	-12	8	9	1	1	28	29
22	13	14	15	16	-12	-13	9	10	-1	2	31	32
23	14	15	11	11	-10	-10	9	10	-1	-2	29	30
24	12	13	19	20	-9	-11	8	10	0	1	28	30
25	5	7	6	7	-12	-15	8	9	1	1	27	29
26	5	7	9	11	-12	-13	8	10	1	1	28	29
27	5	6	9	10	-10	-11	7	9	1	1	27	28
28	4	6	10	11	-9	-10	7	9	1	2	28	29
29	3	4	11	13	-10	-12	8	10	1	2	29	30
30	3	6	11	12	-10	-11	8	10	1	2	28	29

31	3	4	9	10	-11	-12	8	10	1	2	17	30
32	3	5	10	10	-9	-11	6	8	1	2	26	27
33	3	5	9	10	-11	-12	6	8	2	3	27	28
34	3	5	12	13	-11	-12	6	8	2	2	27	27
35	3	5	12	13	-11	-12	6	7	1	2	18	30
36	2	3	8	9	-11	-12	4	6	2	2	29	30
37	3	5	12	12	-9	-10	5	7	2	3	27	28
38	3	5	11	12	-12	-14	6	7	3	3	27	28
39	6	8	11	12	-12	-14	6	7	2	2	17	28
40	5	6	9	10	-11	-12	5	7	3	3	20	24
41	5	6	6	7	-9	-10	5	7	3	4	27	29
42	5	7	7	9	-11	-12	5	6	3	3	27	28
43	5	7	11	12	-13	-14	4	6	3	3	17	28
44	5	6	9	10	-10	-12	4	6	1	1	20	32
45	6	8	9	11	-12	-14	4	6	1	1	19	30
46	6	9	8	9	-10	-12	4	6	1	2	25	27
47	8	9	8	9	-10	-12	5	7	2	2	30	32
48	8	9	8	9	-9	-10	6	8	2	3	28	30

Таблица П2 − Значения параметры колец после токарной обработки **(2-ое кольцо)**

	D нар		*D* ж		*d*		*H*		*h*		*h′*	
	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
	min	max	min	max	min	max	min	max	min	max	min	max
1	5	6	3	3	0	-1	12	12	1	2	29	30
2	3	3	1	3	0	8	12	13	2	2	28	29
3	2	2	2	3	0	-3	12	14	2	3	28	29
4	13	14	4	5	-15	-16	14	15	2	2	29	30
5	3	4	1	2	0	3	13	14	2	2	29	30
6	6	7	7	8	-5	-6	12	13	2	3	28	29
7	14	16	1	3	-14	-16	14	14	2	2	29	30
8	13	15	0	3	-1	-6	10	11	2	2	28	29
9	15	16	3	4	-18	-19	14	20	2	2	28	29
10	14	16	2	3	-17	-18	13	13	1	1	29	30
11	6	7	4	4	-19	-20	14	14	1	1	29	29
12	-2	-4	1	2	-4	-6	13	14	1	2	29	30
13	3	4	1	3	-2	-4	11	11	2	2	29	30
14	3	3	0	1	-3	-4	13	13	2	2	30	31
15	4	5	0	1	0	-1	13	13	2	2	29	30
16	6	6	1	2	-2	-3	13	13	2	2	28	29
17	9	10	-3	4	0	-3	13	14	1	2	29	30
18	6	8	2	3	-3	-4	13	13	2	3	28	29
19	6	7	2	4	-2	-5	12	14	2	2	28	29
20	7	8	1	2	-1	-5	13	14	2	3	29	30
21	5	7	2	3	-3	-5	13	14	2	3	28	29
22	6	7	2	3	-4	-5	13	14	2	2	29	30
23	6	6	6	7	-2	-5	15	16	2	3	28	29
24	5	7	2	3	-3	-4	5	6	2	2	29	30
25	9	10	4	6	0	-1	5	6	-6	-6	29	30
26	8	9	3	4	-5	-5	15	16	2	3	29	30
27	8	10	4	6	-4	-6	16	17	1	2	30	31
28	5	8	2	5	4	6	13	13	2	2	29	30
29	5	6	3	4	-2	-3	14	16	2	2	29	30
30	5	6	4	5	0	-2	9	11	1	1	27	28

31	5	7	2	4	-5	-7	11	12	0	1	28	30
32	4	5	6	8	-6	-8	12	13	2	2	29	30
33	3	3	5	7	-4	-5	12	13	3	3	28	29
34	6	7	4	5	-6	-7	10	11	2	3	27	28
35	5	6	3	4	-2	-2	10	12	2	2	28	29
36	7	9	5	5	-5	-6	8	8	2	3	27	28
37	7	8	3	4	-7	-8	8	10	2	3	27	28
38	8	9	3	5	-4	-6	9	10	3	3	28	29
39	6	8	3	5	-4	-7	6	5	3	4	26	27
40	8	9	3	4	-5	-6	9	12	3	4	28	29
41	7	9	1	3	0	-2	10	12	3	4	27	28
42	6	8	3	4	1	-3	8	11	3	4	28	29
43	7	8	4	4	-3	-4	9	10	3	4	28	29
44	7	8	4	6	-3	-5	10	11	3	4	27	28
45	7	9	2	3	-2	-3	5	6	-1	-2	28	30
46	8	9	2	3	-6	-7	6	7	-1	-2	28	29
47	8	9	1	3	0	-2	2	6	-1	0	26	28
48	7	9	9	10	-2	-3	4	5	-1	-2	28	29

Таблица П3 − Значения параметры колец токарной обработки **(2-е кольцо)**

	D нар		D ж		d		H		h		h'	
	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
	min	max	min	max	min	max	min	max	min	max	min	max
1	5	6	6	7	-14	-15	6	7	-1	1	25	26
2	5	6	6	7	-10	-11	5	6	-2	0	27	28
3	5	6	7	8	-12	-13	4	5	-2	0	26	27
4	5	7	2	3	-13	-14	5	6	-2	0	25	26
5	6	7	-4	-5	-11	-13	5	6	-1	0	26	28
6	9	10	8	9	-11	-13	4	6	-2	-2	27	28
7	9	11	7	8	-12	-13	6	8	-2	0	26	27
8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
9	2	3	9	10	-11	-13	5	7	-1	-2	27	28
10	12	14	10	13	-13	-15	6	7	-1	0	27	29
11	9	10	8	9	-11	-13	4	5	-1	0	28	29
12	11	12	0	1	-10	-13	5	6	-1	0	25	28
13	11	12	8	9	-12	-13	19	20	-1	0	28	31
14	8	9	6	8	-11	-12	10	12	-2	0	27	28
15	8	9	8	9	-9	-10	9	10	-1	0	28	29
16	13	15	10	11	-9	-9	9	10	-1	0	28	30
17	9	10	9	10	-7	-12	8	10	-1	0	29	30
18	10	11	10	11	-10	-11	8	10	0	0	27	29
19	10	12	10	10	-11	-13	10	11	-1	1	27	29
20	10	11	10	11	-13	-13	9	10	0	0	29	30
21	10	11	2	4	-12	-13	8	10	0	1	26	28
22	8	11	6	8	-12	-13	9	12	-1	0	30	31
23	9	10	12	13	-11	-12	10	12	0	1	30	32
24	6	7	21	22	-11	-13	8	10	2	3	28	29
25	-2	-4	6	7	-12	-11	10	11	2	4	28	30
26	3	5	5	6	-10	-13	9	10	1	2	27	29
27	4	6	2	5	-12	-15	9	10	2	3	18	29
28	2	5	5	5	-12	-11	8	9	1	2	25	26
29	2	3	2	3	-10	-11	6	9	1	3	26	27
30	1	3	-6	-7	-10	-11	9	10	1	3	27	29
31	1	2	-2	-3	-10	-12	9	10	2	3	26	28

32	2	3	0	2	-11	-14	8	9	2	3	25	27
33	2	3	3	4	-12	-11	5	7	3	3	27	29
34	2	3	5	6	-9	-14	7	10	2	4	28	29
35	3	4	7	7	-12	-8	7	8	2	3	28	30
36	3	4	6	6	-8	-11	6	6	3	3	26	27
37	2	3	3	3	-9	-12	5	6	2	3	29	30
38	2	4	0	2	-9	-12	7	10	3	4	16	29
39	3	5	5	7	-9	-15	5	7	3	4	30	32
40	2	4	1	0	-12	-9	5	6	4	5	28	29
41	4	5	4	5	-8	-13	6	8	4	5	24	28
42	4	6	3	3	-12	-13	8	11	4	5	23	25
43	3	5	3	5	-12	-12	7	9	5	6	23	25
44	4	5	2	3	-11	-11	5	7	4	5	25	27
45	4	5	0	2	-9	-12	7	9	4	5	25	28
46	4	5	-1	0	-11	-13	7	8	2	3	26	31
47	5	6	-5	-6	-12	-12	6	8	2	3	17	28
48	5	7	-7	-8	-11	-10	5	7	3	4	21	25

Таблица П4−Значения параметры колец токарной обработки **(2-ое кольцо)**

	D нар		*D* ж		*d*		*H*		*h*		*h′*	
	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72
	min	max	min	max	min	max	min	max	min	max	min	max
1	15	17	9	11	-16	-18	9	10	1	2	28	30
2	15	16	9	10	-19	-20	9	12	1	2	28	30
3	15	16	10	11	-19	-21	6	7	1	2	29	30
4	14	16	8	11	-19	-20	8	10	1	2	29	30
5	17	18	10	11	-19	-20	10	11	0	1	29	30
6	15	17	7	9	3	5	9	10	1	2	28	29
7	3	4	9	12	-1	-4	8	10	1	2	27	29
8	3	4	2	2	1	2	13	14	1	2	28	29
9	8	9	9	10	-6	-8	8	9	1	2	28	30
10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
11	5	7	6	9	0	-2	9	9	1	2	28	30
12	6	7	9	11	-3	-5	9	11	-2	-3	27	28
13	8	9	8	9	-2	-4	6	8	2	3	28	29
14	7	8	5	8	-3	-5	9	10	2	3	28	29
15	6	7	7	8	-5	-6	10	11	2	3	27	28
16	10	11	9	11	-4	-5	9	10	2	3	28	29
17	4	5	10	11	-1	-2	9	11	2	3	27	28
18	7	8	8	10	-5	-7	10	11	2	3	28	29
19	2	4	7	8	-3	-5	11	12	2	3	27	28
20	8	10	5	7	0	-2	11	12	3	4	27	28
21	9	10	7	8	-1	-3	12	13	2	3	29	30
22	9	9	5	8	-5	-7	10	11	1	2	28	29
23	10	11	5	7	-2	-4	9	11	2	2	28	29
24	10	11	4	7	-3	-6	11	13	1	2	27	28
25	10	11	5	7	-4	-5	10	12	5	3	28	30
26	7	8	7	9	-3	-6	12	13	4	5	27	30
27	9	10	5	6	-3	-5	10	11	1	2	28	29
28	8	10	6	9	-4	-7	10	12	1	2	27	29
29	7	8	5	6	-3	-5	12	13	1	2	27	28
30	5	5	8	9	-1	-2	12	13	1	2	27	29
31	5	8	3	7	-2	-4	5	7	1	2	27	28

32	5	7	4	5	-1	1	8	9	2	3	24	27
33	7	10	4	6	-4	-7	5	7	0	2	28	29
34	7	9	5	7	-6	-9	6	7	1	2	29	30
35	7	9	2	5	-1	-3	7	8	0	2	27	28
36	7	8	5	8	-5	-9	8	11	3	4	28	29
37	6	7	4	5	-2	-3	11	12	2	3	28	30
38	7	9	5	7	-2	-4	9	10	2	3	25	27
39	8	9	6	7	-8	-9	5	7	3	4	25	26
40	7	8	5	7	-5	-7	9	11	2	3	25	28
41	7	10	5	7	-3	-5	7	8	2	4	25	26
42	12	14	4	5	-4	-5	9	10	2	3	26	28
43	6	10	5	7	-4	-6	10	12	3	3	25	27
44	7	8	3	6	0	4	8	9	2	4	25	28
45	7	8	4	6	-2	-4	6	8	3	5	26	30
46	7	8	5	6	0	2	15	15	4	5	29	30
47	8	9	3	5	-4	-7	0	2	-2	-2	27	28
48	8	10	2	6	-2	-5	3	4	-1	-2	27	29

Приложение 8

Рекомендуемые варианты для выполнения расчетов студентами экономических специальностей

Таблица П5 − Статистическая информация о результатах производственной деятельности организации

№ организации	Среднесписочная численность работников, чел.	Выпуск продукции, млн. руб.	Фонд заработной платы, млн. руб.	Затраты на производство продукции, млн. руб.	Среднегодовая стоимость ОПФ
1	162	36,45	11,340	30,255	34,714
2	156	23,4	8,112	20,124	24,375
3	179	46,540	15,036	38,163	41,554
4	194	59,752	19,012	47,204	50,212
5	165	41,415	13,035	33,546	38,347
6	158	26,86	8,532	22,831	27,408
7	220	79,2	26,400	60,984	60,923
8	190	54,720	17,100	43,776	47,172
9	163	40,424	12,062	33,148	37,957
10	159	30,21	9,540	25,376	30,21
11	167	42,418	13,694	34,359	38,562
12	205	64,575	21,320	51,014	52,5
13	187	51,612	16,082	41,806	45,674
14	161	35,42	10,465	29,753	34,388
15	120	14,4	4,32	12,528	16,0
16	162	36,936	11,502	31,026	34,845
17	188	53,392	16,356	42,714	46,428
18	164	41,0	12,792	33,62	38,318
19	192	55,680	17,472	43,987	47,59
20	130	18,2	5,85	15,652	19,362
21	159	31,8	9,858	26,394	31,176
22	162	39,204	11,826	32,539	36,985
23	193	57,128	18,142	45,702	48,414
24	158	28,44	8,848	23,89	28,727
25	168	43,344	13,944	35,542	39,404
26	208	70,720	23,920	54,454	55,25
27	166	41,832	13,280	34,302	38,378
28	207	69,345	22,356	54,089	55,446
29	161	35,903	10,948	30,159	34,522
30	186	50,220	15,810	40,678	44,839

По результатам выполнения лабораторной работы №16 с вероятностью 0,99

1. Постройте доверительные интервалы для математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения.

2. Проверьте гипотезу о нормальном законе распределения для изучаемой выборочной совокупности.
3. Разбейте исходные данные на две равные части и для каждой из частей проверьте гипотезы о равенстве средних и дисперсий.

Используемые в дальнейшем экономические показатели и их расчет:

− средняя заработная плата работников – отношение фонда заработной платы к численности работников;

− фондоотдача – отношение стоимости произведенной продукции к среднегодовой стоимости основных фондов;

− фондоемкость – отношение среднегодовой стоимости основных фондов к стоимости произведенной продукции;

– фондовооруженность − отношение среднегодовой стоимости основных фондов к среднесписочной численности работников;

− прибыль − разность между выпуском продукции и затратами на производство;

− выпуск продукции на одного работника −отношение выпуска продукции к среднесписочной численности работников;

− рентабельность ОПФ − отношение прибыли к средней стоимости ОПФ;

− рентабельность продукции − отношение прибыли к затратам на производство;

− рентабельность персонала − отношение прибыли к среднесписочной численности работников;

− производительность труда − отношение выпуска продукции к среднесписочной численности работников.

ВАРИАНТЫ

вариант	вариант	показатель
1	16	Среднесписочная численность работников
2	17	Выпуск продукции
3	18	Фонд заработной платы
4	19	Затраты на производство продукции
5	20	Среднегодовая стоимость ОПФ
6	21	Средняя заработная плата работников
7	22	Фондоотдача.
8	23	Фондоемкость
9	24	Фондовооруженность
10	25	Прибыль
11	26	Выпуск продукции на одного работника
12	27	Рентабельность ОПФ
13	28	Рентабельность продукции
14	29	Рентабельность персонала
15	30	Производительность труда