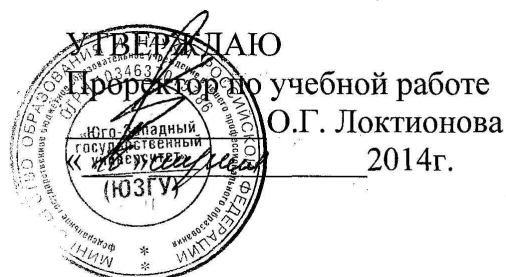


Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Емельянов Сергей Геннадьевич
Должность: ректор
Дата подписания: 05.02.2021 19:31:36
Уникальный программный ключ:
9ba7d3e34c012eba476ffd2d064cf2781953be730df2374d16f3c0ce536f0fc6

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра высшей математики



Интегрирование функций одной переменной. Приложения.

Методические указания по выполнению модуля-5

Курск 2014

УДК 517

Составители: Н.А.Моргунова, А.Ф.Пихлап

Рецензент
Кандидат технических наук, доцент кафедры
высшей математики *К.В.Жилина*

Интегрирование функций одной переменной. Приложения: методические указания по выполнению модуля 5 / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Н.А.Моргунова, А.Ф.Пихлап; Курск, 2014. 51 с., табл. 1. Рис.13. Библиогр.: с.55

Излагаются краткие методические рекомендации по темам математического анализа: неопределенные интегралы и методы их решения, определенный интеграл и его вычисления, несобственные интегралы, приложения определенных интегралов.

Методические указания предназначены для студентов технических и экономических специальностей.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать _____. Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. _____. Уч.-изд. л. _____. Тираж _____ экз. Заказ. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94

Содержание

Введение	4
1. Неопределенный интеграл.....	5
1.1. Табличное интегрирование. Замена переменной в неопределенном интеграле.....	5
1.2. Формула интегрирования по частям.....	8
1.3. Интегрирование рациональных функций.....	10
1.4. Интегрирование некоторых выражений, содержащих радикалы.....	19
1.5. Интегрирование биномиальных дифференциалов.....	24
1.6. Интегрирование некоторых выражений, содержащих тригонометрические функции.....	26
2. Определенный интеграл.....	30
2.1. Определение и свойства определенного интеграла.....	30
2.2. Методы вычисления определенного интеграла.....	32
2.2.1. Теорема Ньютона-Лейбница.....	32
2.2.2. Методы замены переменной в определенном интеграле.....	33
2.2.3. Формула интегрирования по частям в определенном интеграле.....	34
3. Несобственные интегралы.....	35
3.1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования.....	35
3.2. Несобственные интегралы от неограниченной функции.....	39
4. Приложение определенного интеграла.....	41
4.1. Вычисление площади плоской фигуры в декартовых координатах.....	41
4.2. Вычисление площади фигуры, ограниченной линией, заданной параметрически.....	45
4.3. Вычисление площади плоской фигуры в полярных координатах.....	46
4.4. Вычисление длины дуги плоской кривой.....	47
4.5. Вычисление объема тел вращения.....	49
4.6. Вычисление площади поверхностей тел вращения.....	52
Список рекомендуемой литературы.....	53

Введение

Цель настоящего методического пособия – научить студента технике интегрирования и умению решать различные задачи на приложения определенных интегралов.

Каждый параграф начинается с краткого теоретического введения, где приводятся основные определения, формулы, теоремы без доказательств. При подборе задач авторы прежде всего исходили из учета тех трудностей, с которыми могут встретиться студенты на пути овладения методами интегрирования.

В работе приведены 52 примера с подробными решениями по указанной тематике. При вычислении площадей плоских фигур, длины дуги кривой, объемов тел вращения решения иллюстрировались для наглядности рисунками и подробными пояснениями.

Данное пособие является приложением к модулю 5 «Интегрирование функций», в котором приведены индивидуальные задания по темам «Неопределенные интегралы», «Несобственные интегралы» и «Определенные интегралы и их приложения». Методическое пособие предназначено для студентов первого курса технических и экономических специальностей.

Авторы надеются, что это методическое издание поможет студентам в самостоятельной работе по выполнению модуля и изучению данного материала.

1. Неопределенный интеграл

1.1. Табличное интегрирование. Замена переменной в неопределенном интеграле

Введем несколько определений, свойств интегралов, формул.

Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если во всех точках этого отрезка выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Если функция имеет первообразную, то функции вида $F(x) + C$, где C – постоянная, также являются первообразными.

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется совокупность (или семейство) всех ее первообразных:

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

Отыскание неопределенного интеграла называется интегрированием функции и основывается на следующих правилах интегрирования:

а) $\int dF(x) = F(x) + C;$

б) $(\int f(x) dx)' = f(x);$

в) $d(\int f(x) dx) = f(x) dx ;$

г) $\int C \cdot f(x) dx = C \cdot \int f(x) dx$ где C – постоянная;

д) $\int (f_1(x) \pm f_2(x) \pm \dots \pm f_n(x)) dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx \pm \dots \pm \int f_n(x) dx$

е) $\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C ;$

ж) Если $\int f(x) dx = F(x) + C$ и $t = \varphi(x)$, то $\int f(t) dt = F(t) + C.$

Замена переменной в неопределенном интеграле производится с помощью подстановок двух видов:

1) $x = \varphi(t)$

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt,$$

где $\varphi(t)$ – монотонная, непрерывно дифференцируемая функция новой переменной t ;

2) $\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du$

$u = g(x)$, u – новая переменная.

Таблица основных интегралов

- 1) $\int dx = x + C;$
- 2) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1;$
- 3) $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C;$
- 4) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$
- 5) $\int e^x dx = e^x + C;$
- 6) $\int \sin x dx = -\cos x + C;$
- 7) $\int \cos x dx = \sin x + C;$
- 8) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C;$
- 9) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C;$
- 10) $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C;$
- 11) $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C;$
- 12) $\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} dx = -\operatorname{cth} x + C;$
- 13) $\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \operatorname{th} x + C;$
- 14) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arctg} x + C;$
- 15) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsin} x + C = -\operatorname{arccos} x + C;$
- 16) $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C;$
- 17) $\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C;$
- 18) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C;$
- 19) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C;$
- 20) $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C;$
- 21) $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + C;$

$$22) \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C;$$

$$23) \int \frac{1}{\cos x} dx = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C;$$

$$24) \int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x| + C;$$

$$25) \int \operatorname{ctg} x dx = \ln |\sin x| + C.$$

Пример 1. Найти интеграл $\int (2\sqrt{x} - \frac{7}{x^2} + 3x - 8) dx$.

Решение. Используя свойства степеней и правила интегрирования, получим

$$\begin{aligned} \int \left(2\sqrt{x} - \frac{7}{x^2} + 3x - 8 \right) dx &= 2 \int x^{\frac{1}{2}} dx - 7 \cdot \int x^{-2} dx + 3 \int x dx - 8 \int dx = \\ &= 2 \cdot \frac{x^{3/2}}{3/2} - 7 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + 3 \cdot \frac{x^2}{2} - 8 \cdot x + C = \\ &= \frac{4}{3} x \sqrt{x} + \frac{7}{x} + \frac{3}{2} x^2 - 8x + C. \end{aligned}$$

Пример 2. Найти интеграл $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx$.

Решение. Правило ж) позволяет найти интеграл с помощью метода подведения функции под знак дифференциала. Исходный интеграл можно привести к формуле 2 из таблицы интегралов, преобразовав его следующим образом

$$\int \ln^3 x \cdot \frac{1}{x} dx = \int \ln^3 x \cdot d(\ln x), \quad \text{где} \quad d(\ln x) = (\ln x)' dx = \frac{1}{x} dx$$

Далее в качестве переменной выберем $t = \ln x$, тогда получим интеграл от степенной функции

$$\int \ln^3 x d(\ln x) = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{4} \ln^4 x + C.$$

Пример 3. Найти интеграл $\int \sqrt{\sin x + 8} \cdot \cos x dx$.

Решение. Применяя тот же прием, что и в предыдущем примере, получим

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\sin x + 8} \cdot \cos x dx &= \int (\sin x + 8)^{1/2} d(\sin x) = \\ &= \int (\sin x + 8)^{1/2} d(\sin x + 8) = \{t = \sin x + 8\} = \int t^{1/2} dt = \frac{t^{3/2}}{3/2} + C = \\ &= \frac{2}{3} (\sin x + 8)^{3/2} + C = \frac{2}{3} (\sin x + 8) \cdot \sqrt{\sin x + 8} + C. \end{aligned}$$

Пример 4. Найти интеграл $\int (3x + 10)^{15} dx$.

Решение. Введем новую переменную $t = 3x + 10$, тогда $x = \frac{1}{3}(t - 10)$, $dx = \frac{1}{3}(t - 10)' dt = \frac{1}{3} dt$.

Отсюда получаем

$$\int (3x + 10)^{15} dx = \int t^{15} \cdot \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^{16}}{16} + C = \frac{1}{48} \cdot (3x + 10)^{16} + C.$$

Замечание. Можно было воспользоваться формулой е).

Пример 5. Найти интеграл $\int \frac{1}{x \cdot \sqrt{7x + 1}} dx$.

Решение. Выполним подстановку $t = \sqrt{7x + 1}$, тогда $7x + 1 = t^2$, $x = \frac{1}{7}(t^2 - 1)$, $dx = \frac{1}{7} \cdot (t^2 - 1)' dt = \frac{2}{7} \cdot t dt$.

Применив формулу 17, имеем:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x \sqrt{7x + 1}} dx &= \int \frac{1}{\frac{1}{7} \cdot (t^2 - 1) \cdot t} \cdot \frac{2}{7} \cdot t \cdot dt = 2 \int \frac{1}{t^2 - 1^2} dt = \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln \left| \frac{t - 1}{t + 1} \right| + C = \ln \left| \frac{\sqrt{7x + 1} - 1}{\sqrt{7x + 1} + 1} \right| + C. \end{aligned}$$

1.2. Формула интегрирования по частям

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du,$$

где $u = u(x)$, $v = v(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции.

Применение данной формулы целесообразно в тех случаях, когда под знаком интеграла стоит произведение разных по смыслу функций – степенной и показательной, степенной и тригонометри-

ческой, показательной и тригонометрической, логарифмической и степенной и т.п.

При этом за $u(x)$ обозначают такую функцию, которая при дифференцировании упрощается, а за dv – ту часть подынтегрального выражения, интеграл от которой может быть найден.

К таким интегралам, например, относятся

$$\int P_n(x) \ln x \, dx, \quad \int P_n(x) \cdot \sin \alpha x \, dx, \\ \int P_n(x) \cdot \cos \beta x \, dx, \quad \int a^{kx} \cdot \sin \beta x \, dx, \quad \int P_n(x) \cdot \arcsin x \, dx \text{ и т.д.,}$$

где $P_n(x)$ – многочлен степени n .

Пример 6. Найти интеграл $\int (2x + 3) \cdot \sin x \, dx$.

Решение. Пусть $u = 2x + 3$, тогда $du = 2 \cdot dx$; $dv = \sin x \, dx$, тогда $v = -\cos x$.

По формуле интегрирования по частям находим

$$\int (2x + 3) \cdot \sin x \, dx = -(2x + 3) \cdot \cos x - \int (-\cos x) \cdot 2 \cdot dx = \\ = -(2x + 3) \cdot \cos x + 2 \sin x + C.$$

Пример 7. Найти интеграл $\int x^3 \cdot \ln x \, dx$.

Решение. Используя тот же прием интегрирования, что и в примере 6, получим

$$\int x^3 \cdot \ln x \, dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = \frac{1}{x} \cdot dx \\ dv = x^3 \cdot dx, \quad v = \frac{x^4}{4} \end{array} \right\} = \frac{x^4}{4} \cdot \ln x - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \\ = \frac{x^4}{4} \cdot \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 \, dx = \frac{x^4}{4} \cdot \ln x - \frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{4} + C = \frac{x^4}{4} \cdot \ln x - \frac{x^4}{16} + C.$$

При отыскании некоторых интегралов формулу интегрирования по частям нужно применить несколько раз, прежде чем сведем его к табличному или получим исходный интеграл.

Пример 8. Найти интеграл $J = \int 3^x \cdot \cos 5x \cdot dx$.

Решение. Используем дважды формулу интегрирования по частям.

$$\begin{aligned}
J &= \int 3^x \cdot \cos 5x \cdot dx = \left\{ \begin{array}{l} u = 3^x, \quad du = 3^x \cdot \ln 3 \cdot dx \\ dv = \cos 5x dx, \quad v = \frac{\sin 5x}{5} \end{array} \right\} = \\
&= 3^x \cdot \frac{1}{5} \cdot \sin 5x - \int \frac{1}{5} \cdot \sin 5x \cdot 3^x \cdot \ln 3 dx = \left\{ \begin{array}{l} u = 3^x, \quad du = 3^x \cdot \ln 3 dx \\ dv = \sin 5x dx, \quad v = -\frac{\cos 5x}{5} \end{array} \right\} = \\
&= \frac{1}{5} \cdot 3^x \cdot \sin 5x - \frac{1}{5} \cdot \ln 3 \cdot \left(3^x \cdot \left(-\frac{\cos 5x}{5} \right) + \int \frac{\cos 5x}{5} \cdot 3^x \cdot \ln 3 dx \right) = \\
&= \frac{1}{5} \cdot 3^x \cdot \sin 5x + \frac{\ln 3}{25} \cdot 3^x \cdot \cos 5x - \frac{\ln^2 3}{25} \cdot \int 3^x \cdot \cos 5x dx.
\end{aligned}$$

Таким образом, приходим к уравнению с неизвестным интегралом J:

$$J = \frac{1}{5} \cdot 3^x \cdot \sin 5x + \frac{\ln 3}{25} \cdot 3^x \cdot \cos 5x - \frac{\ln^2 3}{25} \cdot J \quad \text{или}$$

$$J + \frac{\ln^2 3}{25} \cdot J = \frac{3^x}{5} \cdot \sin 5x + \frac{\ln 3}{25} \cdot 3^x \cdot \cos 5x,$$

$$\frac{25 + \ln^2 3}{25} \cdot J = \frac{3^x}{25} (5 \sin 5x + \ln 3 \cdot \cos 5x),$$

$$J = \frac{3^x}{25 + \ln^2 3} \cdot (5 \sin 5x + \ln 3 \cdot \cos 5x) + C.$$

1.3. Интегрирование рациональных функций

Рассмотрим интегралы от простейших дробей:

$$\text{I. } \int \frac{A}{x-a} dx = A \ln |x-a| + C;$$

$$\text{II. } \int \frac{A}{(x-a)^k} dx = \frac{A}{1-k} \cdot \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C, \quad k \neq 1;$$

$$\text{III. } \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx;$$

$$\text{IV. } \int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^2} dx,$$

где A, B, p, q, a – действительные числа.

На конкретных примерах покажем, как интегрируются простейшие дроби III и IV типов.

Пример 9. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 18}$.

Решение. В квадратном трехчлене, содержащемся в знаменателе подынтегральной функции, выделим полный квадрат:

$$x^2 - 6x + 18 = (x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + 9) + 9 = (x - 3)^2 + 3^2.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 - 6x + 18} &= \int \frac{d(x - 3)}{(x - 3)^2 + 3^2} = \{t = x - 3\} = \\ &= \int \frac{dt}{t^2 + 3^2} = \frac{1}{3} \cdot \operatorname{arctg} \frac{t}{3} + C = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x - 3}{3} + C. \end{aligned}$$

Использована формула 16 из таблицы интегралов.

Пример 10. Найти интеграл $\int \frac{5x + 1}{x^2 + 4x - 1} dx$.

Решение. Выделим в числителе дроби такую линейную функцию, которая равнялась бы производной знаменателя:

$$(x^2 + 4x - 1)' = 2x + 4,$$

$$5x + 1 = \frac{5}{2}(2x + 4) - 10 + 1 = \frac{5}{2}(2x + 4) - 9.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{5x + 1}{x^2 + 4x - 1} dx &= \int \frac{\frac{5}{2}(2x + 4) - 9}{x^2 + 4x - 1} dx = \\ &= \frac{5}{2} \int \frac{(2x + 4)dx}{x^2 + 4x - 1} - 9 \cdot \int \frac{dx}{x^2 + 4x - 1} = J. \end{aligned}$$

Заметим, что в первом из полученных интегралов $(2x + 4)dx = d(x^2 + 4x - 1)$. Введем новую переменную $t = x^2 + 4x - 1$, получим табличный интеграл 3. Во втором интегра-

ле в квадратном трехчлене выделим полный квадрат: $x^2 + 4x - 1 = (x + 2)^2 - 5$, а интеграл сведем к табличному (формула 17). Тогда

$$\begin{aligned} J &= \frac{5}{2} \int \frac{d(x^2 + 4x - 1)}{x^2 + 4x - 1} - 9 \cdot \int \frac{d(x + 2)}{(x + 2)^2 - (\sqrt{5})^2} = \\ &= \{t = x^2 + 4x - 1, z = x + 2\} = \\ &= \frac{5}{2} \int \frac{dt}{t} - 9 \int \frac{dz}{z^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{5}{2} \ln |t| - 9 \cdot \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{z - \sqrt{5}}{z + \sqrt{5}} \right| + C = \\ &= \frac{5}{2} \cdot \ln |x^2 + 4x - 1| - \frac{9}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{x + 2 - \sqrt{5}}{x + 2 + \sqrt{5}} \right| + C. \end{aligned}$$

При интегрировании рациональных дробей IV типа необходимо воспользоваться, так называемой, рекуррентной формулой:

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = J_n;$$

$$J_n = \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot J_{n-1}.$$

Пример 11. Найти интеграл $\int \frac{dx}{(x^2 + 4)^2} = J_2$

Решение. Здесь $n = 2$; $a^2 = 4$. После применения рекуррентной формулы получим

$$\begin{aligned} J_2 &= \int \frac{dx}{(x^2 + 4)^2} = \frac{x}{2 \cdot 4 \cdot (2-1) \cdot (x^2 + 4)^{2-1}} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2 \cdot 2 - 3}{2 \cdot 2 - 2} \cdot J_1 = \\ &= \frac{x}{8(x^2 + 4)} + \frac{1}{8} \cdot \int \frac{dx}{x^2 + 4} = \frac{x}{8(x^2 + 4)} + \frac{1}{16} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$

Если $n > 2$, то рекуррентной формулой нужно пользоваться несколько раз, пока интеграл не будет сведен к табличному.

Пример 12. Найти интеграл $\int \frac{x + 5}{(x^2 + 4x + 5)^2} dx$.

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию. Сначала в числителе выделим производную от квадратного трехчлена, стоя-

щего в знаменателе, далее разобьем интеграл на сумму двух, один из которых легко свести к табличному, а другой найдем по рекуррентной формуле:

$$d(x^2 + 4x + 5) = (2x + 4)dx.$$

$$\frac{x + 5}{(x^2 + 4x + 5)^2} = \frac{\frac{1}{2}(2x + 4) + 3}{(x^2 + 4x + 5)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x + 4}{(x^2 + 4x + 5)^2} + \frac{3}{(x^2 + 4x + 5)^2}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{x + 5}{(x^2 + 4x + 5)^2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x + 4}{(x^2 + 4x + 5)^2} dx + \int \frac{dx}{(x^2 + 4x + 5)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 4x + 5)}{(x^2 + 4x + 5)^2} + 3 \int \frac{d(x + 2)}{((x + 2)^2 + 1)^2} = \\ &= \{x^2 + 4x + 5 = t; \quad x + 2 = z\} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2} + 3 \int \frac{dz}{(z^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{-1}}{-1} + 3 \cdot \left(\frac{z}{2 \cdot 1 \cdot (z^2 + 1)} + \frac{2 \cdot 2 - 3}{2 \cdot 2 - 2} \cdot \int \frac{dz}{z^2 + 1} \right) = \\ &= \frac{-1}{2t} + \frac{3z}{2(z^2 + 1)} + \frac{3}{2} \operatorname{arctg} z + C = \\ &= -\frac{1}{2(x^2 + 4x + 5)} + \frac{3(x + 2)}{2(x^2 + 4x + 5)} + \frac{3}{2} \operatorname{arctg}(x + 2) + C. \end{aligned}$$

Если под знаком интеграла стоит сложная рациональная функция, то с ней предварительно выполняют следующие преобразования:

1) если рациональная дробь неправильная, то сначала представляют ее в виде суммы целой части и правильной рациональной дроби $\frac{Q(x)}{P(x)}$;

2) многочлен, стоящий в знаменателе рациональной функции, следует разложить на линейные и квадратичные множители в зависимости от того, каковы корни этого многочлена

$$P(x) = (x - a)^m \cdot \dots \cdot (x^2 + px + q)^n \cdot \dots,$$

где квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ не имеет действительных корней, а p и q – действительные числа;

3) правильную рациональную дробь $\frac{Q(x)}{P(x)}$ (степень многочлена

на

$P(x)$ меньше степени многочлена $Q(x)$) раскладывают на простейшие дроби:

$$\begin{aligned} \frac{Q(x)}{P(x)} = & \frac{A_1}{(x - a)^m} + \frac{A_2}{(x - a)^{m-1}} + \dots + \frac{A_m}{x - a} + \dots + \\ & + \frac{B_1x + C_1}{(x^2 + px + q)^n} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + px + q)^{n-1}} + \dots + \frac{B_nx + C_n}{x^2 + px + q}; \end{aligned}$$

4) вычисляют неопределенные коэффициенты $A_1, A_2, \dots, B_1, C_1, \dots, B_n, C_n$.

В конечном итоге интегрирование рациональной функции сводится к отысканию интеграла от суммы многочлена и простейших рациональных дробей.

Любую правильную рациональную дробь можно представить в виде простейших дробей. Поясним это на примерах.

Пример 13.
$$\frac{5x^2 + 14}{(x - 1)(x + 3)(x + 5)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 3} + \frac{C}{x + 5}.$$

Дробь правильная, многочлен в знаменателе уже разложен на простые множители, корни действительные и различные. Каждому действительному некратному корню многочлена в знаменателе соответствует простейшая дробь I типа.

Пример 14.
$$\frac{7x^2 + 8x - 1}{(x + 3)^4} = \frac{A}{(x + 3)^4} + \frac{B}{(x + 3)^3} + \frac{C}{(x + 3)^2} + \frac{D}{x + 3}.$$

Дробь правильная, многочлен в знаменателе имеет один корень кратности 4.

Пример 15.
$$\frac{5x^2 + 2x + 4}{(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 5)} = \frac{Ax + B}{x^2 + x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + x + 5}.$$

Дробь правильная, множители знаменателя неприводимые, т.к. $D_1 = 1 - 4 < 0$, $D_2 = 1 - 20 < 0$, многочлен 4-ой степени в знаменателе имеет две пары комплексно-сопряженных различных корней.

$$\text{Пример 16. } \frac{3x^2 + x - 1}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{Ax + B}{(x^2 + x + 1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + x + 1}.$$

Дробь правильная, многочлен в знаменателе имеет комплексные корни, является кратной парой комплексно-сопряженных корней.

Пример 17.

$$\begin{aligned} & \frac{3x^4 + 7x - 1}{(x + 2)x^2(x^2 + x + 5)^2(x^2 - x + 2)} = \\ & = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} + \frac{Dx + F}{(x^2 + x + 5)^2} + \frac{Cx + E}{x^2 + x + 5} + \frac{Lx + M}{x^2 - x + 2}. \end{aligned}$$

Данное представление правильной рациональной дроби вытекает из анализа примеров 13–16.

Коэффициенты A, B, C, D, \dots в разложении правильных рациональных дробей на простейшие дроби можно вычислить методом неопределенных коэффициентов. Суть его в следующем. Приводя дроби к общему знаменателю, получим равные многочлены в числителе справа и слева. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x , получим систему линейных уравнений для определения неизвестных коэффициентов.

$$\text{Пример 18. Найти } \int \frac{x^2 + 2x + 5}{x + 2} dx.$$

Решение. Подынтегральная функция не является правильной рациональной дробью.

Выполним преобразования:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 2x + 5}{x + 2} &= \frac{x(x + 2) + 5}{x + 2} = x + \frac{5}{x + 2}. \\ \int \frac{x^2 + 2x + 5}{x + 2} dx &= \int \left(x + \frac{5}{x + 2} \right) dx = \frac{x^2}{2} + 5 \ln |x + 2| + C. \end{aligned}$$

Пример 19. Найти $\int \frac{7x-3}{x^3-x^2+x-1} dx$.

Решение. Под знаком интеграла стоит правильная рациональная дробь. Разложим ее на простейшие:

$$\begin{aligned} \frac{7x-3}{x^3-x^2+x-1} &= \frac{7x-3}{(x^3-x^2)+(x-1)} = \frac{7x-3}{x^2(x-1)+(x-1)} = \\ &= \frac{7x-3}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} = \frac{(Ax+B)(x-1)+C(x^2+1)}{(x^2+1)(x-1)}. \end{aligned}$$

Сравним четвертую дробь и последнюю. Два многочлена считаются равными, если будут равны коэффициенты при одинаковых степенях x :

$$7x-3 = (Ax+B) \cdot (x-1) + C(x^2+1)$$

$$7x-3 = (A+C)x^2 + (-A+B)x + C - B.$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 \mid A+C=0, \\ x \mid -A+B=7, \\ x^0 \mid C-B=-3 \end{array} \right\}$$

Складывая все три равенства, получим $2C = 4$ или $C = 2$.

Из первого уравнения системы $A = -C$ или $A = -2$.

Из второго уравнения системы получим

$$B = 7 + A \quad \text{или} \quad B = 7 - 2 = 5.$$

Следовательно,

$$\frac{7x-3}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{-2x+5}{x^2+1} + \frac{2}{x-1}.$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} \int \frac{7x-3}{x^3-x^2+x-1} dx &= \int \left(\frac{-2x+5}{x^2+1} + \frac{2}{x-1} \right) dx = \\ &= -\int \frac{2x}{x^2+1} dx + 5 \int \frac{dx}{x^2+1} + 2 \ln |x-1| = \\ &= -\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} + 5 \operatorname{arctg} x + 2 \ln |x-1| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\ln(x^2 + 1) + 5\operatorname{arctg}x + 2\ln|x - 1| + C = \\
&= 5\operatorname{arctg}x + \ln\frac{(x-1)^2}{x^2 + 1} + C.
\end{aligned}$$

Пример 20. Найти $\int \frac{x^5 + 1}{x^4 - 8x^2 + 16} dx$.

Решение. Под знаком интеграла стоит неправильная рациональная дробь. Представим ее в виде суммы целой части и правильной дроби. Предварительно поделим эту дробь «уголком»

$$\begin{array}{r}
x^5 + 1 \\
x^5 - 8x^3 + 16x \quad | \quad x^4 - 8x^2 + 16 \\
\hline
8x^3 - 16x + 1
\end{array}$$

Получим

$$\begin{aligned}
\frac{x^5 + 1}{x^4 - 8x^2 + 16} &= x + \frac{8x^3 - 16x + 1}{x^4 - 8x^2 + 16} = x + \frac{8x^3 - 16x + 1}{(x^2 - 4)^2} = \\
&= x + \frac{8x^3 - 16x + 1}{(x-2)^2(x+2)^2} = x + \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x+2)^2} + \frac{D}{x+2}. \\
\frac{8x^3 - 16x + 1}{(x-2)^2(x+2)^2} &= \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x+2)^2} + \frac{D}{x+2} = \\
&= \frac{A(x+2)^2 + B(x-2)(x+2)^2 + C(x-2)^2 + D(x+2)(x-2)^2}{(x-2)^2(x+2)^2}.
\end{aligned}$$

Дроби с равными знаменателями будут равны, если равны и их числители.

$$8x^3 - 16x + 1 = A(x+2)^2 + B(x-2)(x+2)^2 + C(x-2)^2 + D(x+2)(x-2)^2.$$

Коэффициенты A, B, C, D найдем комбинированным методом: A и C – методом подстановки, а B и D – методом неопределенных коэффициентов.

Пусть $x = -2$, тогда

$$8 \cdot (-2)^3 + 16 \cdot 2 + 1 = A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 16 + D \cdot 0 \quad \text{или}$$

$$16C = -31; \quad C = -\frac{31}{16}.$$

Пусть $x = 2$, тогда

$$8 \cdot 2^3 - 16 \cdot 2 + 1 = 16A + B \cdot 0 + C \cdot 16 + D \cdot 0 \quad \text{или}$$

$$16A = 33; \quad A = \frac{33}{16}.$$

Преобразуем выражение

$$\begin{aligned} & A(x-2)^2 + B(x-2)(x+2)^2 + C(x-2)^2 + D(x-2)^2(x+2) = \\ & = A(x^2 - 4x + 4) + B(x^3 + 2x^2 - 4x + 8) + C(x^2 - 4x + 4) + \\ & + D(x^3 - 2x^2 - 4x + 8) = (B+D)x^3 + (A+2B+C-2D)x^2 + \\ & + (-4A-4B-4C-4D)x + (4A+8B+4C+8D) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} 8x^3 - 16x + 1 &= (B+D)x^3 + (A+2B+C-2D)x^2 + \\ &+ (-4A-4B-4C-4D)x + 4A+8B+4C+8D. \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x в последнем равенстве, получим систему линейных уравнений относительно неизвестных A , B , C и D .

$$\left. \begin{array}{l} x^3 \quad B+D=8, \\ x^2 \quad A+2B+C-2D=0, \\ x \quad -4A-4B-4C-4D=-16, \\ x^0 \quad 4A+8B+4C+8D=1 \end{array} \right\}$$

Учитывая, что $A = \frac{33}{16}$, $C = -\frac{31}{16}$, воспользуемся только пер-

вым и вторым уравнениями системы линейных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} D = 8 - B, \\ \frac{33}{16} + 2B - \frac{31}{16} - 2(8 - B) = 0 \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left\{ \begin{array}{l} D = \frac{129}{32}, \\ B = \frac{127}{32}. \end{array} \right.$$

Далее найдем исходный интеграл

$$\begin{aligned} & \int \frac{x^5 + 1}{x^4 - 8x^2 + 16} dx = \\ & = \int \left(x + \frac{33}{16} \cdot \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{127}{32} \cdot \frac{1}{x-2} - \frac{31}{16} \cdot \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{129}{32} \cdot \frac{1}{x+2} \right) dx = \end{aligned}$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{33}{16(x-2)} + \frac{127}{32} \ln|x-2| + \frac{31}{16(x+2)} + \frac{129}{32} \cdot \frac{1}{x+2} + C.$$

Пример 21. Найти $\int \frac{x^3}{(x+5)^5} dx$.

Решение. Под знаком интеграла стоит правильная рациональная дробь и можно было бы найти интеграл, представив эту дробь в виде суммы простейших дробей. Однако нахождение интеграла можно значительно упростить, если произвести замену переменной: $x+5=t$; $x=t-5$; $dx=dt$.

Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{(x+5)^5} dx &= \int \frac{(t-5)^3}{t^6} dx = \int \frac{t^3 - 15t^2 + 75t - 125}{t^6} dt = \\ &= \int \left(\frac{1}{t^3} - 15 \cdot \frac{1}{t^4} + 75 \cdot \frac{1}{t^5} - 125 \cdot \frac{1}{t^6} \right) dt = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t^2} + \frac{15}{-3t^3} + \frac{75}{-4t^4} - \frac{125}{-5t^5} + C = \\ &= -\frac{1}{2(x+5)^2} - \frac{5}{(x+5)^3} - \frac{75}{4(x+5)^4} + \frac{25}{(x+5)^5} + C. \end{aligned}$$

1.4. Интегрирование некоторых выражений, содержащих радикалы

Не от всякой иррациональной функции интеграл выражается через элементарные функции. В дальнейшем будем стремиться отыскивать такие подстановки $t = \omega(x)$, которые привели бы подынтегральное выражение к рациональному виду. Если при этом функция $\omega(x)$ выражается через элементарные функции, то интеграл представится в конечном виде и в функции от x .

Назовем этот прием *методом рационализации подынтегрального выражения*.

1) *Интегралы вида* $\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}\right) dx,$

где R означает рациональную функцию от двух аргументов,

$m \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – постоянные.

Полагаем,

$$t = \omega(x) = \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}, \quad t^m = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \quad x = \varphi(t) = \frac{\delta t^m - \beta}{\alpha - \gamma t^m}.$$

Интеграл приводится к виду

$$\int R(\varphi(t), t) \cdot \varphi'(t) dt,$$

здесь $R, \varphi(t), \varphi'(t)$ – рациональные функции.

Вычислив этот интеграл по правилам интегрирования рациональных функций, вернемся к старой переменной, подставив $t = \omega(x)$.

К интегралу вида (1) сводятся более общие интегралы

$$\int R\left(x, \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)^r, \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)^s, \dots\right) dx,$$

где показатели r, s, \dots – рациональны.

Нужно привести эти показатели к общему знаменателю m , чтобы под знаком интеграла получить рациональную функцию от x

и радикала $\sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}$.

Пример 22. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}$.

Решение:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}} &= \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \frac{dx}{x+1} = \left\{ \begin{array}{l} t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}, \\ x = \frac{t^3+1}{t^3-1}, dx = \frac{-6t^2 dt}{(t^3-1)^2} \end{array} \right\} = \\ &= \int \frac{t \cdot (-6t^2) dt}{\left(\frac{t^3+1}{t^3-1} + 1\right) (t^3-1)^2} = \int \frac{-3dt}{t^3-1} = \int \frac{-3dt}{(t-1)(t^2+t+1)} = \\ &= \int \left(-\frac{1}{t-1} + \frac{t+2}{t^2+t+1} \right) dt = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t^2+t+1}{(t-1)^2} \right| + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2t-1}{\sqrt{3}} + C, \end{aligned}$$

где $t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$.

2) Интегралы вида $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$.

Такие интегралы сводятся к табличному, если в квадратном трехчлене выделить полный квадрат.

Пример 23. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 8}}$.

Решение. Преобразуем квадратный трехчлен

$$x^2 - 6x + 8 = (x - 3)^2 - 1; \quad x - 3 = t, \quad x = t + 3, \quad dx = dt.$$

Тогда

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 8}} = \int \frac{d(x - 3)}{\sqrt{(x - 3)^2 - 1}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{табличный} \\ \text{интеграл 19} \end{array} \right\}$$

$$= \ln |t + \sqrt{t^2 - 1}| + C = \ln |x - 3 + \sqrt{x^2 - 6x + 8}| + C.$$

3) Интегралы вида $\int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$.

Для отыскания этого интеграла в числителе необходимо выделить такую линейную функцию, которая равнялась бы производной квадратного трехчлена. Далее разбиваем интеграл на сумму двух, один из которых табличный, а второй рассмотрен в предыдущем пункте.

Пример 24. Найти $\int \frac{7x + 2}{\sqrt{-x^2 + 4x + 5}} dx$.

Решение. Выделим в числителе производную подкоренного выражения

$$(-x^2 + 4x + 5)' = -2x + 4.$$

$$7x + 2 = -\frac{7}{2}(-2x + 4 - 4) + 2 = -\frac{7}{2}(-2x + 4) + 16.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\int \frac{7x+2}{\sqrt{-x^2+4x+5}} dx &= \int \frac{-7/2(-2x+4)+16}{\sqrt{-x^2+4x+5}} dx = \\
&= -\frac{7}{2} \int \frac{(-2x+4)dx}{-x^2+4x+5} + 16 \cdot \int \frac{dx}{-x^2+4x+5} = \\
&= \left. \begin{aligned} & \int (-2x+4)dx = d(-x^2+4x+5) \\ & -x^2+4x+5 = -(x^2-4x+4-4)+5 = -(x-2)^2+9 \end{aligned} \right\} = \\
&= -\frac{7}{2} \int \frac{d(-x^2+4x+5)}{\sqrt{-x^2+4x+5}} + 16 \cdot \int \frac{d(x-2)}{\sqrt{9-(x-2)^2}} = \\
&= \left\{ -x^2+4x+5 = t; \quad x-2 = z \right\} = \\
&= -\frac{7}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} + 16 \int \frac{dz}{\sqrt{9-z^2}} = -7\sqrt{t} + 16 \arcsin \frac{z}{3} + C = \\
&= -7\sqrt{-x^2+4x+5} + 16 \arcsin \frac{x-2}{3} + C.
\end{aligned}$$

4) Интегралы вида $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx, (a \neq 0)$

Эти интегралы приводятся к интегралу от рациональной функции нового переменного с помощью следующих подстановок Эйлера.

I – я подстановка Эйлера. Если $a > 0$, то полагаем

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a} \cdot x + t.$$

Для определенности рассмотрим случай

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a} \cdot x + t. \text{ Тогда}$$

$$ax^2+bx+c = ax^2+2\sqrt{a} \cdot x \cdot t+t^2, \quad x = \frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a} \cdot t}, \text{ то}$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a} \cdot x + t = \sqrt{a} \cdot \frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}} + t \quad - \text{ рациональная}$$

функция от t , dx также выражается рационально через t .

II-я подстановка Эйлера. Если $c > 0$, то полагаем

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c}.$$

Для определенности считаем, что перед c стоит знак «+». Тогда

$$ax^2 + bx + c = x^2t^2 + 2xt\sqrt{c} + c, \quad x = \frac{2\sqrt{ct} - b}{a - t^2}.$$

При этом dx и $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ выражаются рационально через t , поэтому $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ сводится к интегралу рациональной функции зависящей от t .

Пример 25. Найти интеграл $\int \frac{(1 - \sqrt{1 + x + x^2})^2}{x^2 \sqrt{1 + x + x^2}} dx$.

Решение. Применим 2-ю подстановку Эйлера

$$\sqrt{1 + x + x^2} = xt + 1; \quad 1 + x + x^2 = x^2t^2 + 2xt + 1,$$

$$x = \frac{2t - 1}{1 - t^2}, \quad dx = \frac{2t^2 - 2t + 2}{(1 - t^2)^2} dt;$$

$$\sqrt{1 + x + x^2} = xt + 1 = \frac{t^2 - t + 1}{1 - t^2}, \quad 1 - \sqrt{1 + x + x^2} = \frac{-2t^2 + 1}{1 - t^2}.$$

$$\int \frac{(1 - \sqrt{1 + x + x^2})^2}{x^2 \sqrt{1 + x + x^2}} dx = \int \frac{(-2t^2 + 1)^2 (1 - t^2)^2 \cdot (1 - t^2)(2t^2 - 2t + 2)}{(1 - t^2)^2 (2t - 1)^2 (t^2 - t + 1)(1 - t^2)^2} dt =$$

$$= 2 \int \frac{t^2}{1 - t^2} dt = -2 \int \frac{-t^2 + 1 - 1}{1 - t^2} dt = -2 \int \left(1 + \frac{2}{1 - t^2} \right) dt =$$

$$= -2t + \ln \left| \frac{t + 1}{1 - t} \right| + C,$$

$$\text{где } t = \frac{\sqrt{1 + x + x^2} - 1}{x}.$$

III-я подстановка Эйлера. Квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет действительные корни α и β . Тогда $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$

сводится к интегралу от рациональной функции от t с помощью замены

$$a \neq 0 \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \alpha)t \quad \text{или}$$

$$\sqrt{a(x - \alpha)(x - \beta)} = (x - \alpha)t, \quad x = \frac{\alpha\beta - at^2}{a - t^2}.$$

1.5. Интегрирование биномиальных дифференциалов

Биномиальными называются дифференциалы вида

$$x^m (a + bx^n)^p dx,$$

где m, n, p – рациональные числа, a, b – постоянные величины.

Рассмотрим интеграл $\int x^m (a + bx^n)^p dx$.

(1.5)

1) n – целое число. Данный интеграл сводится к интегралу от рациональной функции от t , если положить $t = \sqrt[\lambda]{x}$, λ – наименьшее общее кратное знаменателей дробей m и n .

2) $\frac{m+1}{n}$ – целое число, тогда рационализации подынтегрального выражения можно достигнуть, используя замену

$$t = \sqrt[a + bx^n]{v}, \quad v - \text{знаменатель дроби } p.$$

3) $\frac{m+1}{n} + p$ – целое.

Замена $t = \sqrt[ax^{-n} + b]{v}$, v – знаменатель дроби p , позволяет рационализировать подынтегральную функцию в исходном интеграле.

Эти случаи интегрируемости были известны еще Ньютону. Однако, только в середине прошлого столетия П.Л.Чебышев установил факт, что других случаев интегрируемости в конечном виде для биномиальных дифференциалов нет. Поэтому подстановки 1-3 называют *подстановками Чебышева*.

Пример 26. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt[3]{1+x^5}}$.

Решение:
$$\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}} = \int x^{-1}(1+x^5)^{-\frac{1}{3}} dx.$$

$$m = -1, n = 5, p = -\frac{1}{3}; \quad v = 3.$$

Применим II подстановку Чебышева, т.к. $\frac{m+1}{n} = 0$ – целое число

$$t = \sqrt[3]{1+x^5}, \quad 1+x^5 = t^3, \quad x = (t^3-1)^{1/5}; \quad dx = \frac{3}{5}t^2(t^3-1)^{-\frac{4}{5}} dt.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}} &= \frac{3}{5} \int \frac{tdt}{t^3-1} = \frac{1}{5} \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{t-1}{t^2+t+1} \right) dt = \\ &= \left\{ (t^2+t+1)' = 2t+1, \quad t-1 = \frac{1}{2}(2t+1) - \frac{3}{2} \right\} = \frac{1}{5} \ln |t-1| - \frac{1}{10} \int \frac{dt}{t^2+t+1} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{5} \ln |t-1| - \frac{1}{10} \int \frac{d(t^2+t+1)}{t^2+t+1} + \frac{3}{10} \int \frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \\ &= \frac{1}{5} \ln |t-1| - \frac{1}{10} \ln(t^2+t+1) + \frac{3}{10} \cdot \frac{1 \cdot 2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{10} \ln \frac{(t-1)^2}{t^2+t+1} + \frac{\sqrt{3}}{5} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Пример 27. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^3\sqrt[3]{2-x^3}}$.

Решение. Подынтегральную функцию можно записать в виде $x^{-3} \cdot (2-x^3)^{-\frac{1}{3}}$. Здесь $m = -3; n = 3; p = -\frac{1}{3}$ и

$\frac{(m+1)}{n} + p = \frac{(-3+1)}{3} - \frac{1}{3} = -1$ – целое число. Поэтому имеет место третий случай интегрируемости дифференциального бинома. Про-

изведем замену переменной: $2x^{-3} - 1 = t^3$, тогда $d(2x^{-3} - 1) = dt^3$
или $-6x^{-4}dx = 3t^3 dt$ или $x^{-4}dx = -\frac{1}{2}t^2 dt$.

Преобразуем исходный интеграл

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^3 \cdot \sqrt[3]{2-x^3}} &= \int x^{-3} \cdot (2-x^3)^{-\frac{1}{3}} dx = \int x^{-3} \cdot (x^3(2x^{-3}-1))^{-\frac{1}{3}} dx = \\ &= \int x^{-3} \cdot x^{-1} \cdot (2x^{-3}-1)^{-\frac{1}{3}} dx = \int (2x^{-3}-1)^{-\frac{1}{3}} x^{-4} dx = \\ &= \int (t^3)^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(-\frac{1}{2}t^2\right) dt = -\frac{1}{2} \int t dt = -\frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{2} + C = -\frac{1}{4}t^2 + C = \\ &= -\frac{1}{4} \cdot \sqrt[3]{(2x^{-3}-1)^2} + C = -\frac{1}{4} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{2}{x^3}-1\right)^2} + C = -\frac{\sqrt[3]{(2-x^3)^2}}{4x^2} + C. \end{aligned}$$

1.6. Интегрирование некоторых выражений, содержащих тригонометрические функции

1) Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$

Применим так называемую универсальную тригонометрическую подстановку $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, $x = 2 \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$,

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

С помощью указанной подстановки интеграл $\int R(\sin x, \cos x) dx$ сводится к интегралу от рациональной функции

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Пример 28. Найти интеграл $\int \frac{dx}{3 \sin x + 2}$.

Решение:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{3 \sin x + 2} &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{6t}{1+t^2} + 2} = \int \frac{dt}{t^2 + 3t + 1} = \int \frac{d\left(t + \frac{3}{2}\right)}{\left(t + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}} = \\ &= \frac{1}{2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}} \ln \left| \frac{t + \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}}{t + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}} \right| + C = \frac{\sqrt{5}}{5} \ln \left| \frac{2t + 3 - \sqrt{5}}{2t + 3 + \sqrt{5}} \right| + C = \\ &= \frac{\sqrt{5}}{5} \ln \left| \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 3 - \sqrt{5}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 3 + \sqrt{5}} \right| + C. \end{aligned}$$

2) Интегралы вида $\int R(\sin x) \cdot \cos x dx$ или $\int R(\cos x) \cdot \sin x dx$.

а) $\int R(\sin x) \cdot \cos x dx$ приводится к $\int R(t) dt$ с помощью подстановки $\sin x = t$, $\cos x dx = dt$.

б) $\int R(\cos x) \cdot \sin x dx$ приводится к $\int (-R(t) dt)$, если $\cos x = t$, $\sin x dx = -dt$.

3) Интегралы вида $\int R(\operatorname{tg} x) dx$, $\int R(\sin^{2k} x, \cos^{2m} x) dx$.

Если подынтегральная функция зависит только от $\operatorname{tg} x$ или только от $\sin x$ и $\cos x$, входящих в четных степенях, то применяется подстановка

$$\operatorname{tg} x = t, \quad x = \operatorname{arctg} x, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2}; \quad \sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

в результате которой получим интеграл от рациональной функции:

Пример 29. $\int \frac{dx}{3 + \sin^2 x}$

Решение:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{3 + \sin^2 x} &= \{ \operatorname{tg} x = t \} = \int \frac{dt}{\left(3 + \frac{t^2}{1+t^2} \right) (1+t^2)} = \int \frac{dt}{4t^2 + 3} = \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{\frac{3}{4}}} + C = \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}} \right) + C. \end{aligned}$$

4) Интегралы вида $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$

а) m и n таковы, что по крайней мере одно из них нечетное число. Пусть для определенности n -нечетное. Тогда полагаем $n = 2p + 1$

$$\begin{aligned} \int \sin^m x \cdot \cos^n x dx &= \int \sin^m x \cdot \cos^{2p} x \cdot \cos x dx = \\ &= \int \sin^m x \cdot (1 - \sin^2 x)^p d \sin x = \{ \sin x = t \} = \int t^m \cdot (1 - t^2)^p dt = \int R(t) dt. \end{aligned}$$

б) m и n – неотрицательные, четные числа. Полагаем $m = 2p$, $n = 2q$

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2x); \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \\ \int \sin^m x \cdot \cos^n x dx &= \int (\sin^2 x)^p \cdot (\cos^2 x)^q dx = \\ &= \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \right)^p \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \right)^q dx. \end{aligned}$$

Возводя в степень и раскрывая скобки, получим интегралы, содержащие $\cos 2x$ как в четных, так и нечетных степенях. Интегралы с нечетными степенями $\cos 2x$ интегрируются как в случае а). Четные показатели степеней $\cos 2x$ снова понижаем по выше указанным формулам. Продолжая так поступать, получим в конце концов слагаемые вида $\int \cos kx dx$, которые легко интегрируются.

Пример 30. Найти интеграл $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx$.

Решение:

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx = \int \sin^2 x \cdot (1 - \sin^2 x) d \sin x = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C$$

Пример 31. Найти интеграл $\int \sin^2 3x \cdot \cos^2 3x dx$.

Решение:

$$\begin{aligned} \int \sin^2 3x \cdot \cos^2 3x dx &= \frac{1}{4} \int (1 - \cos 6x)(1 + \cos 6x) dx = \\ &= \frac{1}{4} \int (1 - \cos^2 6x) dx = \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \cdot \int \frac{1 + \cos 12x}{2} dx = \\ &= \frac{1}{4} x - \frac{1}{8} x - \frac{1}{8} \cdot \frac{\sin(12x)}{12} + C = \frac{1}{8} x - \frac{1}{96} \sin(12x) + C. \end{aligned}$$

в) m и n – четные числа, но хотя бы одно из них отрицательное.

В этом случае следует сделать замену $\operatorname{tg} x = t$ (или $\operatorname{ctg} x = t$).

Пример 32. Найти интеграл $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$.

$$\begin{aligned} \text{Решение: } \int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx &= \int \frac{\sin^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x)^2}{\cos^2 x \cdot \cos^4 x} dx = \\ &= \int \operatorname{tg}^2 x \cdot (\operatorname{tg}^2 x + 1)^2 dx = \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t; x = \operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{array} \right\} = \int t^2 (1+t^2)^2 \frac{dt}{1+t^2} = \\ &= \int t^2 (1+t^2) dt = \int (t^2 + t^4) dt = \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + C. \end{aligned}$$

5) Интегралы вида $\int \cos mx \cdot \sin nx dx$; $\int \cos mx \cdot \cos nx dx$; $\int \sin mx \cdot \sin nx dx$ ($m \neq n$).

Чтобы проинтегрировать данные функции, достаточно применить тригонометрические формулы:

$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]$$

$$\sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2} [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]$$

$$\sin mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int \sin mx \cdot \cos nxdx &= \frac{1}{2} \int [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x] dx = \\ &= -\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + C. \end{aligned}$$

Аналогично вычисляются два других интеграла.

Пример 33. Найти интеграл $\int \sin 4x \cdot \cos 6xdx$.

Решение:

$$\begin{aligned} \int \sin 4x \cdot \cos 6xdx &= \frac{1}{2} \int (\sin 10x - \sin 2x) dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\cos 10x}{10} + \frac{\cos 2x}{2} \right) + C = -\frac{\cos 10x}{20} + \frac{\cos 2x}{4} + C. \end{aligned}$$

2. Определенный интеграл

2.1. Определение и свойства определенного интеграла

Пусть на сегменте $[a, b]$ задана функция $f(x)$. Выполним следующие операции:

1. С помощью точек деления $x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1}$ разобьем $[a, b]$ на n малых сегментов: $[x_0, x_1]; [x_1, x_2]; \dots; [x_{k-1}, x_k]; \dots; [x_{n-1}, x_n]; x_0 = a, x_n = b$.

2. На каждом малом сегменте выберем произвольную точку $\xi_k, x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$, составим произведение $f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$.

3. Составим, так называемую, интегральную сумму всех таких произведений

$$J_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot \Delta x_k.$$

Определенный интеграл есть число, равное пределу, к которому стремится интегральная сумма J_n , когда $\max \Delta x_k$ стремится к нулю.

Таким образом,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot \Delta x_k.$$

Числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределами (границами) интегрирования, $f(x)$ – подынтегральной функцией, а интервал $[a,b]$ – областью интегрирования.

Функция $f(x)$, для которой существует конечный $\int_a^b f(x)dx$, называется интегрируемой на промежутке $[a,b]$, причем указанный предел не зависит ни от способа разбиения сегмента $[a,b]$ на части, ни от выбора точек ξ_k в каждой из них.

В теореме существования определенного интеграла указывается на то, что всякая непрерывная на промежутке $[a,b]$ функция $f(x)$ является интегрируемой на нем.

Впредь подынтегральную функцию будем считать непрерывной.

Без подробных объяснений приведем некоторые свойства определенных интегралов.

$$1. \int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

$$2. \int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx, \quad c = \text{const.}$$

$$3. \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad c \in (a, b).$$

$$4. \text{Если } f(x) \geq 0 \text{ на } [a,b], \text{ то } \int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

5. Если $f(x) \leq g(x)$ для $\forall x \in [a, b]$, то

$$a) \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx;$$

$$\bar{b}) \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

6. Теорема о среднем: $\exists \xi \in [a, b]$,

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a), \text{ где } f(x) \text{ — непрерывна на } [a, b].$$

7. $\int_a^a f(x) dx = 0.$

8. $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx.$

2.2. Методы вычисления определенного интеграла

Вычисление определенных интегралов как пределов интегральных сумм связано в большими трудностями даже в тех случаях, когда подынтегральные функции являются простыми. Поэтому естественно возникает задача: найти практически удобный метод вычисления определенных интегралов.

Ниже будет сформулирована теорема Ньютона-Лейбница, позволяющая сводить вычисления определенного интеграла к неопределенному. Эта теорема играет фундаментальную роль в математическом анализе (см. подробнее [1] с.397).

2.2.1. Теорема Ньютона-Лейбница

Пусть $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и $F(x)$ — одна из ее первообразных, тогда справедлива формула

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Пример 34. Вычислить $\int_0^2 \frac{1}{x^2 + 4} dx.$

Решение. Используя формулу Ньютона-Лейбница, а также табличный интеграл 16, получим

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2 + 4} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \Big|_0^2 = \frac{1}{2} (\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} - 0 \right) = \frac{\pi}{8}.$$

2.2.2. Методы замены переменной в определенном интеграле

а) Необходимо вычислить интеграл $\int_a^b f(x) dx$,

где $f(x)$ непрерывная функция на $[a, b]$.

Перейдем к новой переменной t , полагая $x = \varphi(t)$. Пусть $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, кроме того, при изменении t от α до β значения функции $\varphi(t)$ не выходят за пределы сегмента $[a, b]$. Предположим, что функция $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на промежутке $[\alpha, \beta]$, то справедлива следующая формула замены переменной

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Пример 35. Вычислить $\int_2^3 \sqrt{4x - x^2 - 3} dx$.

Решение. Преобразуем подкоренное выражение, выделив полный квадрат

$$4x - x^2 - 3 = 1 - (x^2 - 4x + 4) = 1 - (x - 2)^2.$$

Введем новую переменную: $x - 2 = \sin t$, тогда $x = 2 + \sin t$,
 $dx = d(2 + \sin t)$ или $dx = (2 + \sin t)' dt = \cos t dt$.

Найдем пределы интегрирования новой переменной t :

$$\text{если } x_1 = 2, \text{ то } 0 = \sin t \Rightarrow t_1 = 0$$

$$\text{если } x_2 = 3, \text{ то } 1 = \sin t \Rightarrow t_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Воспользуемся формулой замены переменной в определенном интеграле, получим

$$\begin{aligned}
\int_2^3 \sqrt{4x - x^2 - 3} dx &= \int_2^3 \sqrt{1 - (x - 2)^2} dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = \\
&= \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin \pi}{2} \right) - \frac{1}{2} \left(0 + \frac{\sin 0}{2} \right) = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Заметим, что в данном случае при применении формулы замены переменной отпадает необходимость возвращения к старой переменной x по сравнению с неопределенным интегралом. Это вполне объяснимо, ибо определенный интеграл есть некоторое постоянное число, в то время как неопределенный интеграл от той же самой функции есть некоторая функция.

б) Часто вместо замены переменной $x = \varphi(t)$ употребляют обратную замену переменной $t = g(x)$. На конкретном примере покажем, как это делается.

Покажем это на конкретном примере.

Пример 36. Вычислить $\int_1^e \frac{dx}{x(5 + \ln x)}$.

Решение. Пусть $t = \ln x$, тогда $\frac{1}{x} dx = d \ln x = dt$.

Если $x_1 = 1$, то $t_1 = \ln 1 = 0$, если $x_2 = e$, то $t_2 = \ln e = 1$.

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\int_1^e \frac{dx}{x(5 + \ln x)} &= \int_0^1 \frac{d(\ln x)}{5 + \ln x} = \int_0^1 \frac{dt}{5 + t} = \ln |t + 5| \Big|_0^1 = \ln 6 - \ln 5 = \\
&= \ln \frac{6}{5} = \ln 1,2.
\end{aligned}$$

2.2.3. Формула интегрирования по частям в определенном интеграле

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – непрерывные функции вместе со своими первыми производными на $[a, b]$, тогда справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Пример 37. Вычислить интеграл $\int_1^2 x^2 \ln x dx$.

Решение. Применим полученную формулу

$$\int_1^2 x^2 \ln x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x^2 dx, \quad v = \frac{x^3}{3} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{x^3}{3} \cdot \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \left(\frac{8}{3} \ln 2 - \frac{1}{3} \cdot \ln 1 \right) - \frac{1}{3} \int_1^2 x^2 dx =$$

$$= \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{8}{3} \ln 2 - \left(\frac{1}{9} \cdot 8 - \frac{1}{9} \cdot 1 \right) = \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{7}{9}.$$

Подробнее о методах интегрирования в определенном интеграле см.[1] с.399-403.

3. Несобственные интегралы

Определение определенного интеграла, его свойства и методы интегрирования рассматривались в предположении, что промежуток интегрирования $[a, b]$ конечен и функция $f(x)$ непрерывна на нем.

Иногда приходится отказываться от одного или обоих этих предположений. В этом случае мы приходим к понятию несобственного интеграла.

3.1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, непрерывную на бесконечном промежутке $[a; +\infty)$.

Несобственным интегралом от функции $f(x)$ по промежутку $[a; +\infty)$ называется $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx.$$

Если указанный предел существует и конечен, то несобственный интеграл с бесконечным пределом интегрирования называется сходящимся, в противном случае – расходящимся.

Если $f(x) > 0$ на $[a; +\infty)$ и $\int_a^{+\infty} f(x) dx < \infty$, то данный интеграл представляет собой площадь бесконечной криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, прямой $x = a$ и бесконечным интервалом $[a; +\infty)$.

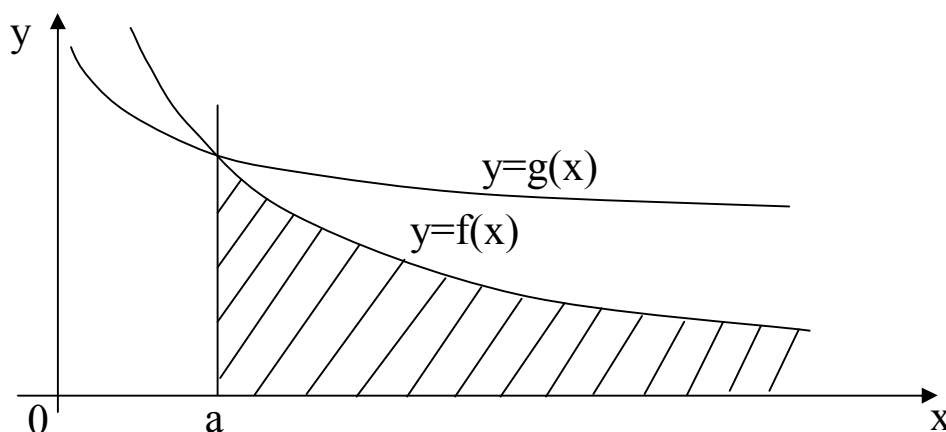


Рис.3.1

Аналогично определяется несобственный интеграл на промежутке $(-\infty; b]$:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{B \rightarrow -\infty} \int_B^b f(x) dx,$$

а на интервале $(-\infty; +\infty)$ определяется формулой

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx,$$

где c – любое действительное число.

Если сравнить две криволинейные трапеции на рис.3.1, то конечность или бесконечность их соответствующих несобственных

интегралов зависит от скорости убывания функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ при $x \rightarrow +\infty$.

Так, например, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

В этом легко убедиться, вычислив $\int_1^A \frac{1}{x^\alpha} dx$, если $A \rightarrow +\infty$.

$$\text{Если } f(x) = \frac{1}{x}, \text{ то } \int_1^A \frac{1}{x} dx = \ln |x| \Big|_1^A = \ln A - \ln 1 = \ln A \rightarrow +\infty$$

при $A \rightarrow \infty$, поэтому $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ – расходится, следовательно, и площадь соответствующей криволинейной трапеции бесконечна.

$$\int_1^A \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^A = -\frac{1}{A} + 1$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{A} \right) = 1$$
 – несобственный интеграл сходящийся, следовательно, площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = \frac{1}{x^2}$, $x = 1$ и бесконечным промежутком $[1; +\infty)$, является конечной и равна 1.

Пример 38. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int_{-\infty}^0 x \cdot e^x dx$.

Решение. Воспользуемся определением несобственного интеграла с бесконечным нижним пределом интегрирования и далее – формулой интегрирования по частям

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^0 x \cdot e^x dx &= \lim_{\beta \rightarrow -\infty} \int_{\beta}^0 x \cdot e^x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = e^x dx, \quad v = e^x \end{array} \right\} = \\
&= \lim_{\beta \rightarrow -\infty} \left(x \cdot e^x \Big|_{\beta}^0 - \int_{\beta}^0 e^x dx \right) = \lim_{\beta \rightarrow -\infty} (x \cdot e^x - e^x) \Big|_{\beta}^0 = \\
&= \lim_{\beta \rightarrow -\infty} (0 - \beta \cdot e^{\beta} - e^0 + e^{\beta}) = \lim_{\beta \rightarrow -\infty} \left(-\frac{\beta}{e^{-\beta}} - 1 + \frac{1}{e^{-\beta}} \right) = -1.
\end{aligned}$$

Несобственный интеграл сходится.

Пример 39. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}.$$

Решение. Воспользуемся определением несобственного интеграла с бесконечными пределами интегрирования. Полагаем $c = -2$.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(x+2)}{(x+2)^2 + 5} = \lim_{B \rightarrow -\infty} \int_B^{-2} \frac{d(x+2)}{(x+2)^2 + 5} + \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-2}^A \frac{d(x+2)}{(x+2)^2 + 5} = \\
&= \lim_{B \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{(x+2)}{\sqrt{5}} \Big|_B^{-2} + \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{(x+2)}{\sqrt{5}} \Big|_{-2}^A = \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \lim_{B \rightarrow -\infty} \left(\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} \frac{B+2}{\sqrt{5}} \right) + \frac{1}{\sqrt{5}} \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{A+2}{\sqrt{5}} - \operatorname{arctg} 0 \right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(0 + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \pi.
\end{aligned}$$

Признак сравнения. Пусть в промежутке $[a; +\infty)$ функции $f(x)$

и $g(x)$ непрерывны и $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Если $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ сходится, то

сходится и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$. Если интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ расходится,

то и $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ также расходится.

Замечание. Аналогичное утверждение верно для несобственных интегралов и по другим бесконечным пределам интегрирования.

Пример 40. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{(x^2 + 3)^4}}$.

Решение. Проведем сравнительный анализ подынтегральной функции при $x \rightarrow +\infty$.

$$\frac{x}{\sqrt{(x^2 + 3)^4}} < \frac{x}{\sqrt{x^8}} = \frac{x}{x^4} = \frac{1}{x^3} \quad (1 \leq x < +\infty).$$

Но $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$ сходится, т.к. $\alpha = 3$ (см. рассуждения выше). Следовательно, по признаку сравнения сходится и данный интеграл.

3.2 Несобственные интегралы от неограниченной функции

Пусть функция $y = f(x)$ имеет разрыв II рода на $[a, b]$ либо в точках a и b , либо в точке $c \in (a, b)$, тогда несобственные интегралы от разрывной функции определяются следующим образом:

1) $x = a$ – точка разрыва, то

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx;$$

2) $x = b$ – точка разрыва, то

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx,$$

3) $x = c$, $c \in (a, b)$, c – точка разрыва, то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Если указанные пределы существуют и конечны, то несобственные интегралы называются сходящимися, в противном случае расходящимися.

Признак сравнения. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ в промежутках $[a, b)$ непрерывны, а в точке $x = b$ имеют разрыв II рода; кроме того

$0 \leq f(x) \leq g(x)$. Если $\int_a^b g(x) dx$ сходится, то сходится $\int_a^b f(x) dx$.

Если $\int_a^b f(x) dx$ расходится, то расходится $\int_a^b g(x) dx$.

Пример 41. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$.

Решение. Функция $y = \frac{1}{(x-1)^2}$ в точке $x = 1$ имеет разрыв II

рода, поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{d(x-1)}{(x-1)^2} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{1+\varepsilon}^3 \frac{d(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x-1} \right) \Big|_0^{1-\varepsilon} + \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x-1} \right) \Big|_{1+\varepsilon}^3 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{1-\varepsilon-1} + \frac{1}{-1} \right) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{3-1} + \frac{1}{1+\varepsilon-1} \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{\varepsilon} \right) = \infty + \infty = \infty \end{aligned}$$

Интеграл расходящийся.

Пример 42. Исследовать на сходимость несобственный интеграл от неограниченной функции

$$\int_0^1 \frac{2x + \operatorname{ch}x}{\sqrt[4]{x^2 + \operatorname{sh}x}} dx.$$

Решение. При $x = 0$ знаменатель функции обращается в 0, а числитель равен 1, следовательно, $x = 0$ – точка разрыва II рода. Во всех остальных точках промежутка $(0; 1]$ подынтегральная функция непрерывна.

Заметим также, что $(2x + \operatorname{ch}x)dx = d(x^2 + \operatorname{sh}x)$,

$$\int \frac{2x + \operatorname{ch}x}{\sqrt[4]{x^2 + \operatorname{sh}x}} dx = \int (x^2 + \operatorname{sh}x)^{-\frac{1}{4}} d(x^2 + \operatorname{sh}x) = \{x^2 + \operatorname{sh}x = t\} =$$

$$= \int t^{-\frac{1}{4}} dt = \frac{4t^{3/4}}{3} + C = \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^2 + \operatorname{sh}x} + C.$$

Используя определение несобственного интеграла от неограниченной функции, а также формулу Ньютона-Лейбница получим

$$\int_0^1 \frac{2x + \operatorname{ch}x}{\sqrt[4]{x^2 + \operatorname{sh}x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{0+\varepsilon}^1 \frac{2x + \operatorname{ch}x}{\sqrt[4]{x^2 + \operatorname{sh}x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^2 + \operatorname{sh}x} \Big|_{\varepsilon}^1 =$$

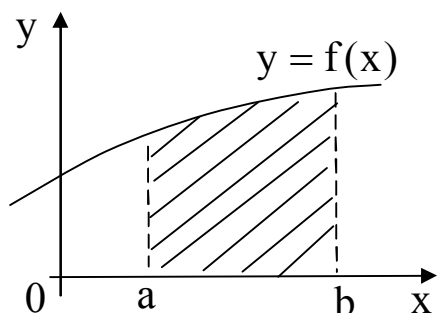
$$= \frac{4}{3} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sqrt[4]{1 + \operatorname{sh}1} - \sqrt[4]{\varepsilon^2 + \operatorname{sh}\varepsilon} \right) = \frac{4}{3} \cdot \sqrt[4]{1 + \operatorname{sh}1}.$$

Интеграл сходящийся.

4. Приложения определенного интеграла

4.1. Вычисление площади плоской фигуры в декартовых координатах

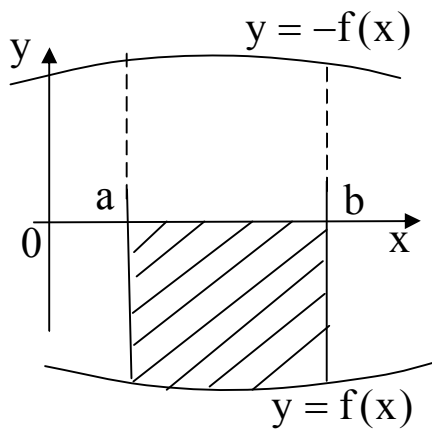
Если задана непрерывная функция $y = f(x)$ на $[a, b]$, $f(x) > 0$, то определенный интеграл с геометрической точки зрения представляет собой площадь так называемой, криволинейной трапеции (рис.4.1).



$$S = \int_a^b f(x) dx \quad (4.1)$$

Рис.4.1

Пусть криволинейная трапеция с основанием $[a, b]$ ограничена снизу кривой $y = f(x)$ (рис.4.2), то из соображений симметрии видим, что



$$S = -\int_a^b f(x) dx \quad (4.2)$$

Рис.4.2

В некоторых случаях, чтобы вычислить площадь искомой фигуры, необходимо разбить ее на сумму или разность двух или более криволинейных трапеций и применить формулы (4.1) или (4.2) (рис.4.3. и 4.4)

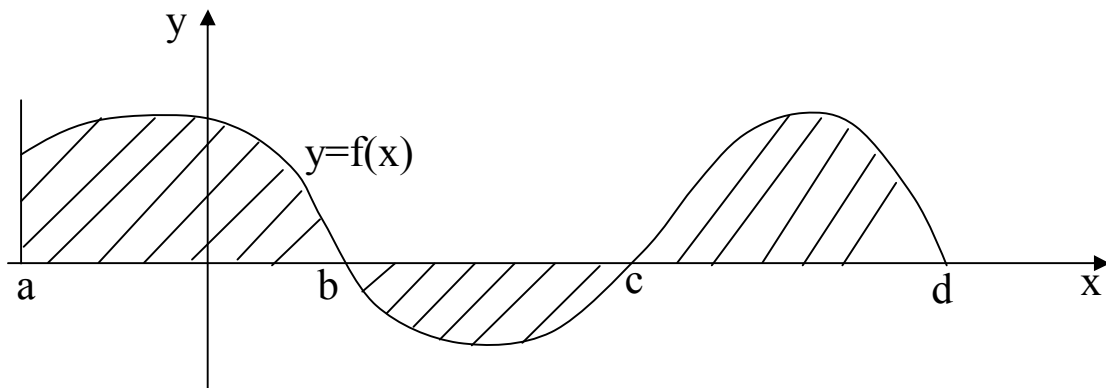
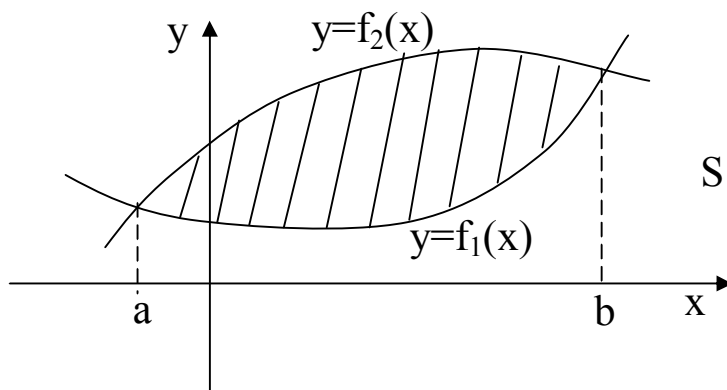


Рис.4.3

$$S = \int_a^b f(x) dx - \int_b^c f(x) dx + \int_c^d f(x) dx \quad (4.3)$$



$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx \quad (4.4)$$

Рис.4.4

Пример 43. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$ и $y = -x$.

Решение. $y = 2x - x^2$ – парабола. Найдем ее вершину и точки пересечения с осями координат.

$$y' = 2 - 2x; \quad y' = 0 \quad \text{или} \quad 2 - 2x = 0, \quad x = 1$$

Если $x_0 = 1$, то $y_0 = 2 - 1 = 1$. $M_0(1; 1)$ – вершина параболы.

$$y = 0 \quad \text{или} \quad 2x - x^2 = 0 \quad \text{или} \quad x(2 - x) = 0 \quad x = 0; \quad x = 2.$$

$y = -x$ – прямая линия.

Найдем абсциссы точек пересечения прямой и параболы:

$$2x - x^2 = -x \quad \text{или} \quad x^2 - 3x = 0 \quad x_1 = 0; \quad x_2 = 3.$$

Для вычисления площади заштрихованной области воспользуемся формулой (4.4)

$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 (2x - x^2 - (-x)) dx = \\ &= \int_0^3 (3x - x^2) dx = \left(3 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^3 = \\ &= \frac{27}{2} - \frac{27}{3} = \frac{9}{2} = 4,5 \text{ (кв.ед.)}. \end{aligned}$$

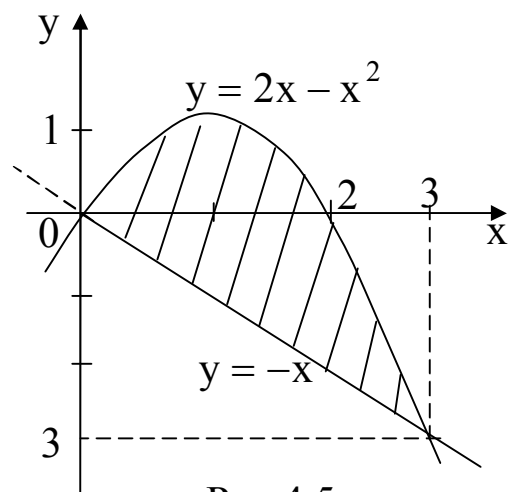


Рис.4.5

Пример 44. Вычислить площадь двух частей, на которые круг $x^2 + y^2 = 8$ разделен параболой $y^2 = 2x$.

Решение. Сделаем чертеж (рис.4.6)

$x^2 + y^2 = 8$ – окружность с центром в начале координат и радиусом $R = \sqrt{8}$.

$y^2 = 2x$ – парабола, имеющая вершину в т.О(0,0)

Найдем точки пересечения параболы и окружности:

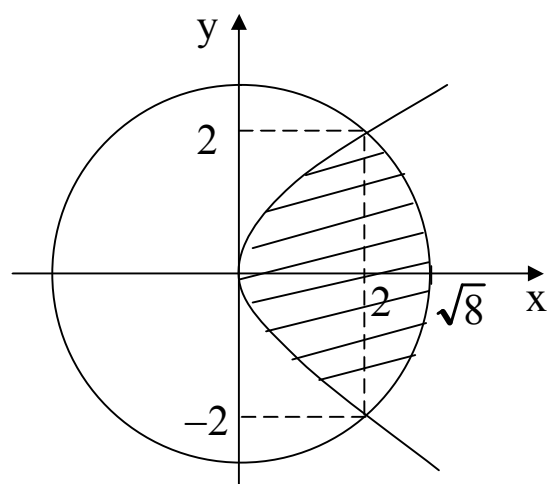


Рис.4.6

$$\begin{cases} y^2 = 8 - x^2 \\ y^2 = 2x \end{cases} \Rightarrow 8 - x^2 = 2x \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$x_1 = -4; x_2 = 2$$

$x = -4$ – не удовлетворяет условию $y^2 = 2x$.

Если $x = 2$, то $y^2 = 4$ или $y_1 = -2$, $y_2 = 2$.

Найдем площадь заштрихованной области по формуле (4.4), в которой изменены переменные интегрирования:

$$S = \int_{y_1}^{y_2} (g_2(y) - g_1(y)) dy.$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x = \sqrt{8 - y^2};$$

$$\begin{cases} y^2 = 2x \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{y^2}{2}.$$

$$s_1 = \int_{-2}^2 \left(\sqrt{8 - y^2} - \frac{y^2}{2} \right) dy = 2 \int_0^2 \left(\sqrt{8 - y^2} - \frac{y^2}{2} \right) dy \quad (\ominus)$$

$$\left. \begin{array}{l} y = \sqrt{8} \sin t; \quad dy = \sqrt{8} \cos t dt \\ \text{Если } y = 0, \text{ то } t = 0 \\ \text{Если } y = 2, \text{ то } 2 = \sqrt{8} \sin t, \quad \sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad t = \frac{\pi}{4} \end{array} \right\}$$

$$\ominus \quad 2 \int_0^2 \sqrt{8 - y^2} dy - \frac{y^3}{3} \Big|_0^2 = 2 \int_0^{\pi/4} \sqrt{8 - 8 \sin^2 t} \cdot \sqrt{8} \cos t dt - \frac{8}{3} =$$

$$= 2 \int_0^{\pi/4} \sqrt{8 - 8 \sin^2 t} \cdot \sqrt{8} \cos t dt - \frac{8}{3} = 16 \int_0^{\pi/4} \cos^2 t dt - \frac{8}{3} =$$

$$= 8 \int_0^{\pi/4} (1 + \cos 2t) dt - \frac{8}{3} = 8 \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\pi/4} - \frac{8}{3} = 8 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) - \frac{8}{3} = 2\pi + \frac{4}{3}.$$

Найдем площадь второй (незаштрихованной) части, на которую круг разделен параболой

$$S_{\text{кр.}} = \pi R^2; \quad S_{\text{кр.}} = \pi \cdot (\sqrt{8})^2 = 8\pi$$

$$S_2 = S_{\text{кр.}} - S_1 = 8\pi - \left(2\pi + \frac{4}{3}\right) = 6\pi - \frac{4}{3}.$$

4.2. Вычисление площади фигуры, ограниченной линией, заданной параметрически

Пусть кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, прямыми $x = a$ и $y = b$ и отрезком $[a, b]$ оси OX , выражается формулой

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t) dt, \quad (4.5)$$

где $t_1 \leq t \leq t_2$, $y(t) \geq 0$, t_1 и t_2 определяются из условий $a = x(t_1)$, $b = x(t_2)$.

Пример 45. Найти площадь фигуры, ограниченной осью OX и одной аркой циклоиды

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Решение. Воспользуемся формулой (4.5). Предварительно найдем $x'(t)$:

$$x'(t) = (a(t - \sin t))' = a(1 - \cos t).$$

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \cdot a(1 - \cos t) dt = \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 dt = \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos t + \cos^2 t) dt = a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2 \cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2}\right) dt = \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2 \cos t + \frac{1}{2} \cos 2t\right) dt = a^2 \cdot \left(\frac{3}{2} t - 2 \sin t + \frac{1}{4} \sin 2t\right) \Big|_0^{2\pi} = \\ &= a^2 \left(\frac{3}{2} \cdot 2\pi - 2 \sin 2\pi + \frac{1}{4} \sin 4\pi\right) - 0 = 3a^2 \pi \text{ (кв.ед.)} \end{aligned}$$

4.3. Вычисление площади плоской фигуры в полярных координатах

В полярных координатах положение точки на плоскости $M(\varphi, r)$ определяется двумя координатами: полярным радиусом $r (r \geq 0)$ и полярным углом φ . Связь между декартовыми координатами (x, y) и полярными (φ, r) осуществляется по формулам

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi, \end{cases} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой $r = r(\varphi)$ и двумя полярными радиусами $\varphi_1 = \alpha$ и $\varphi_2 = \beta$ ($\alpha < \beta$) (рис.4.7), выражается интегралом

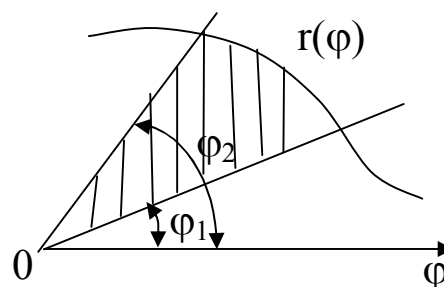


Рис.4.7

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi. \quad (4.6)$$

Пример 46. Найти площадь фигуры, ограниченной улиткой Паскаля $r = 2 + \cos \varphi$.

Решение. Воспользуемся формулой (4.6). Чтобы найти пределы интегрирования α и β , необходимо построить чертеж кривой $r = 2 + \cos \varphi$ в полярных координатах. Результаты вычислений занесем в таблицу 1.

Таблица 1

φ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\cos \varphi$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$r = 2 + \cos \varphi$	3	$2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$	$2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$	2,5	2	1,5	$2 - \frac{\sqrt{3}}{2}$	$2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$	1

Так как функция $\cos \varphi$ – четная, то график функции $r = 2 + \cos \varphi$ строим симметрично относительно горизонтальной оси для значений углов из промежутка $\varphi \in (180^\circ, 360^\circ]$. Для построения

графика функции при $\varphi \in [0; 180^\circ)$ проводим полярную ось r ; на лучах, составляющих с осью r углы, значение которых указано в таблице 1, откладываем соответствующее расстояние, затем точки последовательно соединяем. Получаем замкнутую кривую, называемую улиткой Паскаля (рис.4.8).

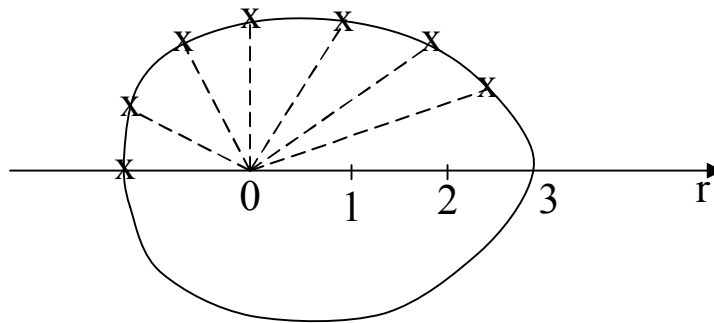


Рис.4.8

Площадь искомой фигуры равна

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (2 + \cos \varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(4 + 4 \cos \varphi + \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} \left(4,5\varphi + 4 \sin \varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{2\pi} = 4,5\pi \quad (\text{кв.ед.})$$

4.4. Вычисление длины дуги плоской кривой

Пусть функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на $[a, b]$, тогда длина дуги кривой $y = f(x)$ на указанном промежутке вычисляется по формуле:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (4.7)$$

Если кривая гладкая и задана параметрически, то длина дуги этой кривой при $t_1 \leq t \leq t_2$ вычисляется по формуле:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \quad (4.8)$$

Если гладкая кривая задана в полярных координатах $r = r(\varphi)$ и $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, то длина ее дуги равна

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} d\varphi. \quad (4.9)$$

Пример 47. Вычислить длину дуги развертки окружности

$$\begin{cases} x = a(\cos t - t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Решение. В нашем случае кривая задана параметрически. Воспользуемся формулой (4.8), предварительно находим производные $x'(t)$ и $y'(t)$.

$$x'(t) = a(\cos t + t \sin t)' = a(-\sin t + \sin t + t \cos t) = at \cos t$$

$$y'(t) = a(\sin t - t \cos t)' = a(\cos t - \cos t + t \sin t) = at \sin t$$

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 t^2 \cos^2 t + a^2 t^2 \sin^2 t} dt = \int_0^{2\pi} a \cdot \sqrt{t^2 (\cos^2 t + \sin^2 t)} dt = \\ &= a \int_0^{2\pi} t dt = a \cdot \frac{t^2}{2} \Big|_0^{2\pi} = a \cdot \frac{4\pi^2}{2} = 2a\pi^2 \text{ (ед.длины)}. \end{aligned}$$

Пример 48. Найти длину дуги кривой $r = 3 \cdot e^{\frac{3\varphi}{4}}$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$.

Решение. Кривая $y = 3 \cdot e^{\frac{3\varphi}{4}}$ задана в полярных координатах. Воспользуемся формулой (4.9). Находим $r'(\varphi)$

$$r' = \left(3 \cdot e^{\frac{3\varphi}{4}} \right)' = 3 \cdot e^{\frac{3\varphi}{4}} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{4} \cdot e^{\frac{3\varphi}{4}}.$$

$$r^2 + (r')^2 = 9 \cdot \left(r^{\frac{3\varphi}{4}} \right)^2 + \frac{81}{16} \cdot \left(r^{\frac{3\varphi}{4}} \right)^2 = \frac{225}{16} \cdot \left(r^{\frac{3\varphi}{4}} \right)^2$$

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\pi/3} \sqrt{\frac{225}{16} \cdot \left(r^{\frac{3\varphi}{4}} \right)^2} d\varphi = \frac{15}{4} \int_0^{\pi/3} e^{\frac{3}{4}\varphi} d\varphi = \frac{15}{4} \cdot \frac{4}{3} e^{\frac{3}{4}\varphi} \Big|_0^{\pi/3} = \\ &= 5 \cdot e^{\frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{3}} - 5e^0 = 5 \cdot (e^{\pi/4} - 1) \text{ (ед.длины)}. \end{aligned}$$

4.5. Вычисление объема тел вращения

Предположим, что площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси OX , может быть выражена функцией от x : $S = S(x)$ при $x \in [a, b]$, тогда объем тела, заключенный между перпендикулярными оси OX плоскостями $x = a$ и $x = b$, находится по формуле

$$V = \int_a^b S(x) dx. \quad (4.10)$$

Если криволинейную трапецию (рис.4.10) вращать вокруг оси OX , то объем тела вращения будет равен

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (4.11)$$

Если плоская область, ограниченная кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$, вращается вокруг оси OX , то

$$V_x = \pi \cdot \int_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x)) dx, \quad (0 \leq f_1(x) \leq f_2(x)) \quad (4.12)$$

Аналогично можно записать формулы для вычисления объемов тел вращения вокруг оси OY :

$$V_y = \pi \int_c^d x^2(y) dy, \quad (4.13)$$

$$V_y = 2\pi \int_c^d x \cdot y(x) dx. \quad (4.14)$$

Если кривые, ограничивающие плоскую область заданы в параметрическом виде, то к формулам (4.10 - 4.14) следует применить соответствующие замены переменной.

Если криволинейный сектор вращать вокруг полярной оси (см.рис.5.7), то

$$V = \frac{2}{3} \pi \int_{\alpha}^{\beta} r^3(\varphi) \sin \varphi d\varphi. \quad (4.15)$$

Пример 49. Вычислить объем тела, полученного при вращении дуги кривой $y = \operatorname{ch}x$, $0 \leq x \leq 1$ вокруг оси OX .

Решение. Данная кривая $y = \operatorname{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ называется цепной линией. График ее изображен на рис.4.9. Объем тела вращения (рис.4.10) вычислим по формуле (4.11)

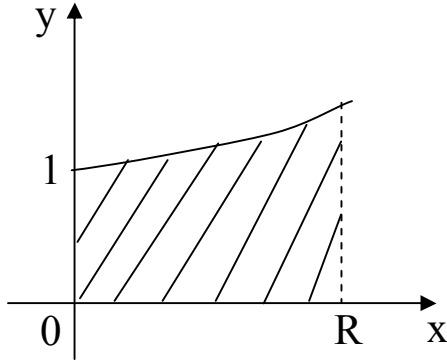


Рис.4.9

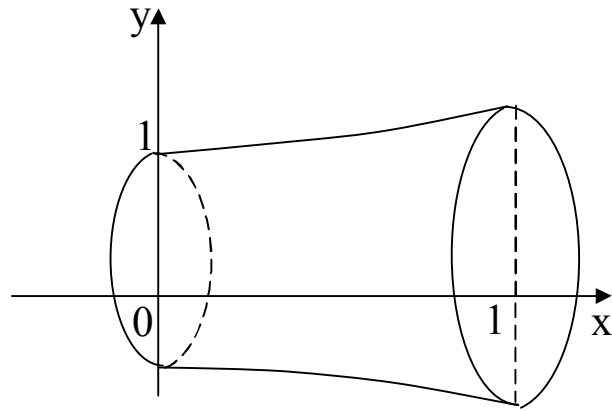


Рис.4.10

$$\begin{aligned} V_X &= \pi \int_0^1 \operatorname{ch}^2 x dx = \pi \int_0^1 \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 dx = \frac{\pi}{4} \int_0^1 (e^{2x} + 2 \cdot e^x \cdot e^{-x} + e^{-2x}) dx = \\ &= \frac{\pi}{4} \int_0^1 (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) dx = \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{e^{2x}}{2} + 2x - \frac{e^{-2x}}{2} \right) \Bigg|_0^1 = \\ &= \frac{\pi}{4} \left(\frac{e^2}{2} + 2 - \frac{e^{-2}}{2} \right) - \frac{\pi}{4} \left(\frac{e^0}{2} + 0 - \frac{e^0}{2} \right) = \frac{\pi}{4} \left(2 + \frac{e^2 - e^{-2}}{2} \right) = \frac{\pi}{4} (2 - \operatorname{sh} 2). \end{aligned}$$

Пример 50. Найти объем параболоида вращения, радиус основания которого равен R , а высота – H .

Решение. Искомый параболоид вращения с указанными параметрами получится, если будем вращать вокруг оси OY параболу $y = kx^2$, $0 \leq y \leq H$ (рис.4.11; 4.12), где параметр k легко вычислить исходя из данного условия.

Если $x = R$, то $y = H$, поэтому

$$H = kR^2 \Rightarrow k = \frac{H}{R^2} \Rightarrow y = \frac{H}{R^2} \cdot x^2.$$

Далее воспользуемся формулой (4.13)

$$V_y = \pi \cdot \int_0^H x^2(y) dy.$$

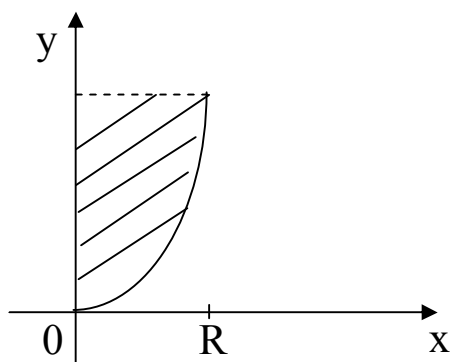


Рис.4.11

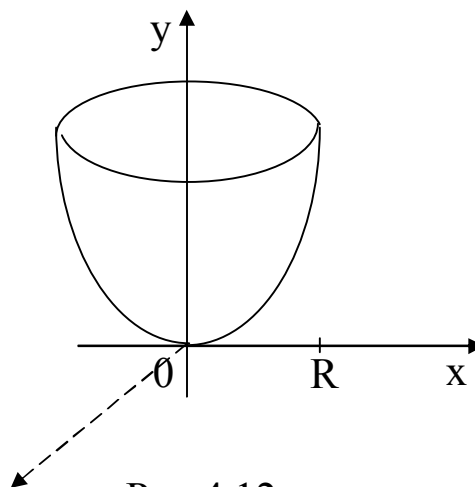


Рис.4.12

Если $y = \frac{H}{R^2} \cdot x^2$, то $x^2 = \frac{R^2}{H} \cdot y$

$$V_y = \pi \cdot \int_0^H \frac{R^2}{H} \cdot y dy = \pi \cdot \frac{R^2}{H} \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_0^H = \frac{\pi \cdot R^2}{H} \cdot \frac{H^2}{2} = \frac{1}{2} \pi R^2 H \text{ (ед}^3\text{)}.$$

Пример 51. Найти объем тела вращения кривой $x = 3 \cos t$, $y = 4 \sin t$ вокруг оси OX.

Решение. Данная кривая задана в параметрическом виде – это эллипс (рис.4.13). Искомой фигурой вращения является эллипсоид. Найдем V_x по формуле (4.11)

$$V_x = \pi \int_a^b y^2(x) dx.$$

Если $x = -3$, то $3 \cos t = -3$, $\cos t = -1$, $t_1 = \pi$.

Если $x = 3$, то $3 \cos t = 3$, $\cos t = 1$, $t_2 = 0$.

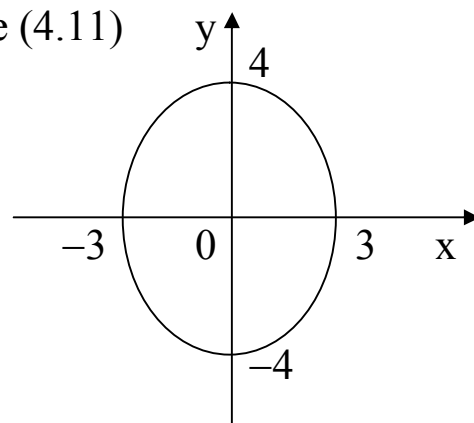


Рис.4.13

$$V_x = \pi \int_{-3}^3 y^2 dx = \pi \int_{\pi}^0 (4 \sin t)^2 d(3 \cos t) = \pi \cdot 16 \cdot 3 \cdot \int_{\pi}^0 (\sin t)^2 d(\cos t) =$$

$$\begin{aligned}
&= 48\pi \int_{\pi}^0 (1 - \cos^2 t) d(\cos t) = 48\pi \left(\cos t - \frac{\cos^3 t}{3} \right) \Big|_{\pi}^0 = \\
&= 48\pi \left(-1 + \frac{1}{3} \right) - 48\pi \left(\cos \pi - \frac{\cos^3 \pi}{3} \right) = 48\pi \cdot \frac{2}{3} - 48\pi \left(-1 + \frac{1}{3} \right) = \\
&= \frac{4}{3} \cdot 48\pi = 64\pi \text{ (куб.ед.)}.
\end{aligned}$$

4.6. Вычисление площади поверхностей тел вращения

Площадь поверхности, образованной вращением гладкой кривой АВ вокруг оси ОХ, равна

$$Q_X = 2\pi \int_A^B |y| dl, \text{ где } dl \text{ — дифференциал дуги кривой.}$$

В зависимости от задания кривой — явное, в параметрическом виде или в полярных координатах — указанную формулу можно расписать так

$$Q_X = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (4.16)$$

$$Q_X = 2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \quad (4.17)$$

$$Q_X = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r \sin \varphi \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} d\varphi. \quad (4.18)$$

Пример 52. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси ОХ дуги кривой $3y - x^3 = 0$, $0 \leq x \leq 1$.

Решение. $3y - x^3 = 0$ или $y = \frac{1}{3}x^3$

$$y' = \left(\frac{1}{3}x^3 \right)' = x^2$$

Воспользуемся формулой (4.16)

$$\begin{aligned}
 Q_x &= 2\pi \int_0^1 \frac{1}{3} x^3 \cdot \sqrt{1 + (x^2)^2} dx = \frac{2\pi}{3 \cdot 4} \int_0^1 (1 + x^4)^{\frac{1}{2}} d(1 + x^4) = \\
 &= \frac{\pi}{6} \cdot \frac{2}{3} (1 + x^4)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{2}{9} \pi (2^{\frac{3}{2}} - 1) = \frac{2}{9} \pi (2\sqrt{2} - 1).
 \end{aligned}$$

С помощью определенного интеграла можно вычислить и многие другие геометрические и физические характеристики фигур: статические моменты и моменты инерции плоских фигур, координаты центра тяжести дуг кривых и плоских фигур, работу, давление и пр. Подробнее об этом см. [2], Гл. XII, [2] §§6,7,8,9.

Список рекомендуемой литературы

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисления. – М.: Наука, 1980. 464.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. ТТ.1- 2, М.: Интеграл-Пресс, 2001,2002, 2007. - 416с., 544с, 416с.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. ЧЧ. 1-2. - М.: Высшая школа, 1980-2000. - 304с., 416с.