МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
_________ О.Г. Локтионова
«___» ___________ 2014 г.

Элементы дифференциальной геометрии

Методические указания и индивидуальные задания к модулю по дисциплинам «Математика», «Геометрия и топология»

Курск 2014

УДК 512.64 + 514.7

Составитель Н.А. Моргунова

Рецензент
Старший преподаватель кафедры высшей математики
А.В.Бойков

Элементы дифференциальной геометрии: методические указания и индивидуальные задания к модулю по дисциплинам «Математика», «Геометрия и топология» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Н.А. Моргунова. Курск, 2014. 14с.: табл. 2. Библиогр.: с. 14.

Настоящие методические указания отражают требования образовательного стандарта уровня подготовки бакалавра по техническим специальностям. Работа содержит индивидуальное задание, теоретические упражнения, расчетные задания, контрольные вопросы по теме «Дифференциальная геометрия» из разделов по дисциплинам «Математика», «Геометрия и топология». Предназначены для студентов всех технических специальностей.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать _______ . Формат 60х84 1/16.
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. .Тираж ____экз. Заказ. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94

Содержание

Введение

Задача данного модуля - активизировать самостоятельную работу студентов при изучении раздела "Дифференциальная геометрия" курса высшей математики с целью приобретения ими навыков применения теоретических знаний к решению практических задач.

Работа содержит теоретические упражнения, практические задания и подразделяется на три уровня сложности.

Первый (высшей сложности) уровень предполагает выполнение двух теоретических упражнений и всех практических задач.

Второй уровень – выполнение одной теоретической и практических задач 4.1, 4.2(а, б, г), 4.3, 4.4(а, б, г).

Третий уровень – выполнение практических задач 4.1,4.2(а, б), 4.3(а), 4.4(а, б, в).

Теоретические упражнения и практические задачи выполняются студентом согласно указаниям, изложенным в п. 2 "Индивидуальное задание".

Предварительно рекомендуется изучение основных положений раздела "Дифференциальная геометрия" и разбор решений задач по следующим источникам:

[1] гл. III §§ 26, 27; гл. VI §§ 1-7; гл. IX §§ 1-6.

[2] гл. V § 5, п.п. 1-5.

[3] гл. VII §§ 3-6.

[5] гл. XVII п.п. 17.1, 17.2.

Преподаватель оценивает работу в зависимости от выбранного студентом уровня сложности. При этом студент должен правильно отвечать на контрольные вопросы, пояснять ход решения выполненных им заданий, уметь решать задачи аналогичного типа, а также грамотно оформить работу.

1. Индивидуальное задание

Индивидуальное задание выбирается студентом в зависимости от номера n фамилии студента в списке журнала, N – последней цифры номера своей академической группы.

Номера теоретических упражнений выбираются так:

K_1 = mod (n, 14) + N ; K_2 = 13 + mod (n, 13).

Например, студент группы КС-14 с порядковым номером 7 по списку группы решает теоретические упражнения под номерами:

K_1 = mod (7, 14) + 4 = 7 + 4 = 11

K_2 = 13 + mod (7, 13) = 13 + 7 = 20,

где mod (p, q) - целочисленный остаток от деления числа p на q.

Если студент выполняет работу первого уровня сложности, то он выбирает теоретические упражнения под номерами 11 и 20, если второго уровня – под номером 11.

Для практических заданий

K = mod (N – 1 + n, 13), где К – номер задачи в каждом из четырех разделов.

Если n = 7, N = 4, то студент для первого уровня сложности должен решить задачи из всех разделов под номером

K = mod (4 – 1 + 7, 13) = 10.

Выполняющий работу по второму уровню сложности решает задачу 10 из разделов 4,1; 4.2(а, б, г); 4.3 и 4.4(а, б, в), а по третьему – только из разделов 4.1; 4.2(а, б); 4.3(а); 4.4(а, б, в).

2. Теоретические упражнения

1. Вывести уравнение касательной к кривой *y = f(x)* в точке $M(x_0, y_0)$. Привести примеры.
2. Вывести уравнение нормали к кривой *y = f(x)* в точке $M(x_0, y_0)$. Привести примеры.
3. Для кривой *y=f(x)* найти длину касательной, заключенной между точкой касания $M(x_0, y_0)$ и осью OX.
4. Вывести формулу длины нормали кривой *y = f(x)* в точке $M(x_0, y_0)$.

5. Вывести формулу длины подкасательной кривой $y = f(x)$ в точке $M(x_0, y_0)$.
6. Вывести формулу длины поднормали для кривой $y = f(x)$ в точке $M(x_0, y_0)$.
7. Показать, что подкасательная параболы $y^2 = 4px$ в любой точке делится вершиной пополам.
8. Показать что поднормаль параболы $y^2 = 4px$ постоянна и равна $2p$. Сделать чертеж.
9. Показать, что касательная к кривой $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 2$ в точке $M(a, b)$ есть $x/a + y/b = 2$.
10. Показать, что заключенный между осями координат отрезок касательной к гиперболе $x/y = m$ делится точкой касания пополам.
11. Доказать, что заключенный между осями координат отрезок касательной к астроиде $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ имеет постоянную длину.
12. Показать, что длина подкасательной для эллипса $x = a \cdot \cos t$, $y = b \cdot \sin t$ в точке $M(x_1, y_1)$, для которой $t = \pi/4$, равна $a/\sqrt{2}$.
13. Доказать, что длина поднормали эллипса $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ в точке $M\left(a/\sqrt{2}, b/\sqrt{2}\right)$ равна $b^2/a\sqrt{2}$.
14. Найти длину касательной эллипса $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ в точке $M(x_1, y_1)$, для которой $t = \pi/4$.
15. Доказать, что длина нормали эллипса $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ в точке $M\left(a/\sqrt{2}, b/\sqrt{2}\right)$ равна $(b/a\sqrt{2})\sqrt{a^2 + b^2}$.
16. Вывести формулу кривизны кривой, заданной явно.
17. Показать, что кривизна кривой, заданной параметрически $x = x(t)$, $y = y(t)$ вычисляется по формуле $K = (|x'y'' - y'x''|)/(x'^2 + y'^2)^{3/2}$.
18. Вывеете формулу для вычисления кривизны кривой, заданной в полярных координатах.
19. Показать, что в каждой точке лемнискаты $\rho = a^2 \cos 2\varphi$ кривизна пропорциональна радиус-вектору этой точки.

20. Доказать, что для точек спирали Архимеда $\rho = a\varphi$ при $\varphi \to \infty$ величина разности между радиус-вектором и радиусом кривизны стремится к нулю.
21. Показать, что радиус кривизны циклоиды в любой ее точке вдвое больше длины нормали в той же точке.
22. Доказать, что нормаль к данной кривой, является касательной к ее эволюте.
23. Доказать, что кривая

$$\vec{r} = (a_1 \cdot t^2 + b_1 \cdot t + c_1)\,\vec{i} + (a_2 \cdot t^2 + b_2 \cdot t + c_2)\,\vec{j} +$$
$$+ (a_3 \cdot t^2 + b_{3.} \cdot t + c_3)\vec{k}$$

плоская.
24. Вывести формулу кривизны пространственной кривой, заданной параметрически.
25. Вывести формулу для вычисления кручения пространственной кривой, заданной параметрически.

3. Расчетные задания

3.1. Касательная и нормаль к плоской кривой

1. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $y = x^3 - 3x^2 - x + 5$ в точке M(3, 2).
2. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $x^2 + 2xy^2 + 3y^4 = 6$ в точке M(1, −1).
3. Какой угол образует с осью абсцисс касательная к параболе $y = x^2 - 3x + 5$ проведенная в точке M(2, 3)? Написать уравнение этой касательной.
4. Найти угол между параболами $y = 8 - x^2$ и $y = x^2$.
5. Найти уравнение касательной и длину подкасательной окружности $x^2 + y^2 = 4$ в точке $M(x_1, y_1)$.
6. Найти уравнение нормали и длину поднормали окружности $x^2 + y^2 = 9$ в точке M(x_0, y_0).

7. Составить уравнение касательной к гиперболе $x^2/9 - y^2/8 = 1$, проведенной в точке M(−9, −8).
8. Составить уравнения касательной и нормали к астроиде $x = \sqrt{2}\cos^3 t,\ y = \sqrt{2}\sin^3 t,$ проведенных в точке, для которой $t = \pi/4$.
9. Составить уравнения касательной и нормами к циклоиде $x = t - \mathit{sin}\, t,\ y = 1 - \mathit{cos}\, t,$ проведенных в точке, для которой $t = \pi/2$.
10. Показать, что нормаль к кривой $3y = 6x - 5x^3$, проведенная в точке M(1, 1/3), проходит через начало координат.
11. Какой порядок касания имеет цепная линия $y = (e^x + e^{-x})/2$ с параболой $y = 1 + x^2/2$ в точке x = 0?
12. Найти уравнение той касательной к параболе $y^2 = 20x$, которая образует угол 45° с осью OX.
13. Найти уравнения касательных к окружности $x^2 + y^2 = 52$, параллельных прямой $2x + 3y = 6$.
14. Найти длины касательной и подкасательной циклоиды $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t$ в точке, для которой $t = \pi/2$.
15. Составить уравнения касательной и нормали к полукубической параболе $x = t^2,\ y = t^3$ в точке, для которой $t = 2$.
16. Какой угол образует с осью абсцисс касательная к кривой $y = shx$ в точке O(0, 0)?
17. Составить уравнения касательной и нормали к цепной линии $y = ch(x/2)$ в точке, где $x = 2\ln 2$.
18. Найти угол между кривой $y = x - x^3$ и прямой $y = 5x$.
19. Найти угол между кривыми $y = x^3$ и $y = 1/x^2$.
20. Найти длины нормали и поднормали кривой $\mathrm{x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t}$ в точке, для которой $t = \pi/2$.
21. Найти угол между линиями $y = 1 + \sin x$ и $y = 1$.
22. Найти длины подкасательной и поднормали для астроиды $x = 4\cos^3 t,\ y = 4\sin^3 t$.
23. Найти длины касательной и нормали для астроиды $x = 4\cos^3 t,\ y = 4\sin^3 t$.

24. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y = 8(4 + x^2)$ в точке, где x =2.

25. Найти угол между кривыми $y = \sqrt{2}\sin x$, $y = \sqrt{2}\cos x$.

3.2. Кривизна плоской кривой

Найти следующие характеристики плоской кривой в указанной точке (таблица 1):

а) кривизну линии;
б) радиус кривизны;
в) координаты центра кривизны;
г) составить уравнение эволюты кривой.

Таблица 1

Уравнение плоской кривой

n	Уравнение плоской кривой	Координаты точки
1	2	3
1	$4x^2 + y^2 = 4$	(0, 2)
2	$xy = 12$	(3, 4)
3	$y = x^3$	(1, 1)
4	$16y^2 = 4x^4 - x^6$	(2, 0)
5	$x^{2/3} + y^{2/3} = 1$	$\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}; \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$
6	$y^2 = x^3$	(4, 8)
7	$x^2 - y^2 = 1$	(1, 1)
8	$y = \ln x$	(1, 0)
9	$y = \sin x$	$(\pi/2, 1)$
10	$x = 3t^2,\ y = 3t - t^3$	при t =1
11	$\rho = 1 - \cos\varphi$	при $\varphi = \pi$
12	$y^3 = 4x$	(1, 1)
13	$x = 3t,\ y = t^2 - 6$	при t =1
14	$y = x\ln x$	$(1/e, -1/e)$

Продолжение табл.1

1	2	3
15	$x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t$	при $t = \pi/4$
16	$y^2 = 6x$	(3/2, 3)
17	$x = t - \sin t;\ y = 1 - \cos t$	(x_0, y_0)
18	$x = 2\cos t;\ y = 3\sin t$	(x_0, y_0)
19	$y^2 = 16x$	(4, 8)
20	$x^2 + 9y^2 = 9$	(3, 0)
21	$x^2 - xy + y^2 = 1$	(1, 1)
22	$x = t^2;\ y = 1 - 1/3t^3$	при $t = 1$
23	$\rho = \sin 2\varphi$	при $\varphi = \pi/4$
24	$y = \sqrt[3]{x}$	(1, 1)
25	$\rho = \cos 2\varphi$	при $\varphi = \pi/4$

3.3. Вектор-функция скалярного аргумента и ее производная

Для приведенных ниже вектор-функций $\vec{r} = \vec{r}(t)$:

а) построить линию Г-годограф вектор-функций;

б) найти производную вектор-функций $d\vec{r}/dt$.

Какова связь между вектором $d\vec{r}/dt$ и линией Г. Показать на рисунке.

1. $\vec{r} = (2t-1)\vec{i} + (-3t+2)\vec{j} + 4t\,\vec{k},$ $\quad t \in R$
2. $\vec{r} = 3t\,\vec{i} + 2\vec{j} + 5\,\vec{k},$ $\quad t \in R$
3. $\vec{r} = 3\,\vec{i} + 2t\,\vec{j} + 5\,\vec{k},$ $\quad t \in R$
4. $\vec{r} = \sqrt{1-t^2}\,\vec{i} + \sqrt{1+t^2}\,\vec{j},$ $\quad t \in [0, 1]$
5. $\vec{r} = 2\cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + 3t\,\vec{k},$ $\quad t \in R$
6. $\vec{r} = 4\operatorname{ch} t\,\vec{i} - \vec{j} + 3\operatorname{sh} t\,\vec{k},$ $\quad t \in R$
7. $\vec{r} = 3t\,\vec{i} + (2t - t^2)\vec{j},$ $\quad t \in R$
8. $\vec{r} = t\,(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}),$ $\quad t \in R$

9. $\vec{r} = \vec{i} + \vec{j} + t\,\vec{k},$ $t \in R$
10. $\vec{r} = \mathrm{ch}\,t\,\vec{i} + \mathrm{sh}\,t\,\vec{j},$ $t \in R$
11. $\vec{r} = 2\cos^3 t\,\vec{i} + 2\sin^3 t\,\vec{j},$ $t \in [0, 2\pi]$
12. $\vec{r} = t\,\vec{i} + t^2\,\vec{j} + t^3\,\vec{k},$ $t \in R$
13. $\vec{r} = \cos t\,\vec{i} + 3\sin t\,\vec{j} + t\,\vec{k},$ $t \in R$
14. $\vec{r} = \cos^3 t\,\vec{i} + \sin t \cos t\,\vec{j} + \sin t\,\vec{k},$ $t \in [0, 2\pi]$
15. $\vec{r} = 5\cos t\,\vec{i} + 4\sin t\,\vec{j} + 2\vec{k},$ $t \in [0, 2\pi]$
16. $\vec{r} = (\mathrm{sh}\,t - 1)\,\vec{i} + \mathrm{ch}^2 t\,\vec{j} + 3\vec{k},$ $t \in R$
17. $\vec{r} = 4t\,\vec{i} + (2 - 3t)\vec{j} + (2t - 1)\vec{k},$ $t \in R$
18. $\vec{r} = 3t\,\vec{j} + (2t + t^2)\vec{k},$ $t \in R$
19. $\vec{r} = 3t\,\vec{i} - 4t\,\vec{j},$ $t \in R$
20. $\vec{r} = 2(t - \sin t)\,\vec{i} + 2(1 - \cos t)\vec{j},$ $t \in [0, 2\pi]$
21. $\vec{r} = 3t\,\vec{i} - 4t\,\vec{j},$ $t \in R$
22. $\vec{r} = t^3\,\vec{i} + t^2\,\vec{j} + t\,\vec{k},$ $t \in R$
23. $\vec{r} = e^{2t}\,\vec{i}\,\vec{j} - (t + 8)^{4/3}\vec{j},$ $t \in R$
24. $\vec{r} = (t^3 + t)\vec{i} + t^2\vec{j},$ $t \in R$
25. $\vec{r} = \sin t\,\vec{i} + \cos^2 t\,\vec{j} + \sin t \cos t\,\vec{k},$ $t \in [0, 2\pi]$

3.4. Сопровождающий трехгранник пространственной кривой. Кривизна и кручение

а) Найти главные единичные векторы касательной $\vec{\tau}$, главной нормали $\vec{\nu}$ и бинормали $\vec{\beta}$ пространственной кривой $\vec{r} = \vec{r}(t)$ в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ (таблица 2);

б) найти кривизну и кручение кривой;

в) составить уравнение соприкасающейся плоскости;

г) составить уравнение спрямляющей плоскости;

д) составить уравнение нормальной плоскости.

Таблица 2

Уравнения пространственной кривой

n	Уравнение кривой $r = r(t)$	$t = t_0$
1	$x = e^t,\ y = e^{-t},\ z = t$	$t = 0$
2	$x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t,\ z = 4\sin t/2$	$t = \pi$
3	$x = 2t,\ y = \ln t,\ z = t^2$	$t = 1$
4	$x = t^2 + 1,\ y = \cos t,\ z = e^t$	$t = 0$
5	$x = t/\sqrt{2},\ y = t/\sqrt{2},\ z = \ln\sin t$	$t = \pi/2$
6	$x = (t+1)^2,\ y = t^3,\ z = t^2 + 1$	$t = 0$
7	$x = 1 - \sin t,\ y = \cos t,\ z = t$	$t = 0$
8	$x = e^t \cdot \cos t,\ y = e^t \cdot \sin t,\ z = e^t$	$t = 0$
9	$x = e^t, y = e^{-t},\ z = t/\sqrt{2}$	$t = 0$
10	$x = t, y = t^2,\ z = t^3$	$t = 0$
11	$x = 3t - t^3,\ y = 3t^2,\ z = 3t + t^3$	$t = 1$
12	$x = 2t, y = \ln t,\ z = t^2$	$t = 1$
13	$x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = 2t$	$t = t_0$
14	$x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ z = 6t$	$t = t_0$
15	$x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$	$t = 3$
16	$x = \cos t + \sin^2 t;\ y = \sin t(1 - \cos t);\ z = -\cos t$	$t = \pi/2$
17	$x = t^4/4;\ y = t^3/3;\ z = t^2/2$	$t = t_0$
18	$x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = \operatorname{sh} t$	$t = t_0$
19	$x = e^{-t} \cdot \sin t;\ y = e^{-t};\ z = e^{-t}$	$t = t_0$
20	$x = e^{-t};\ y = 2t;\ z = \ln t$	$t = 1$
21	$x = t^2,\ y = -1/t,\ z = 1/t^2$	$t = 1$
22	$x = 5t;\ y = 12\cos t;\ z = 12\sin t$	$t = \pi/2$
23	$x = \cos^2(t/2);\ y = 1/2 \cdot \sin t;\ z = \sin(t/2)$	$t = \pi/2$
24	$x = t \cdot \sin t + \cos t;\ y = t \cdot \cos t - \sin t;\ z = t^2/2$	$t = \pi/2$
25	$x = 6t;\ y = 3t^2;\ z = t^3$	$t = 1$

Контрольные вопросы

1. Записать уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M(x_0, y_0)$.
2. Каково уравнение нормали к кривой $y = f(x)$ в точке $M(x_0, y_0)$?
3. Что называется подкасательной кривой? Формула для вычисления длины подкасательной.
4. Что называется поднормалью кривой? Формула для вычисления длины поднормали.
5. Что называется углом между двумя кривыми? Формула для вычисления этого угла.
6. Определение кривизны плоской кривой.
7. Формулы для вычисления кривизны кривой, заданной явно, параметрически, в полярной системе координат.
8. Что называется радиусом кривизны?
9. Как найти координаты центра кривизны линии $y = f(x)$?
10. Что называется эволютой линии, эвольвентой?
11. Что подразумевается под "порядком касания" плоских кривых?
12. Определения вектор-функции скалярного аргумента $\vec{r} = \vec{r}(t)$ и ее производной.
13. Что называется годографом вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$?
14. Как направлен вектор производной вектор-функции?
15. Сформулировать основные правила дифференцирования вектор-функции скалярного аргумента.
16. Записать уравнение касательной к пространственной кривой $\vec{r} = \vec{r}(t)$ в точке $M(x_0, y_0, z_0)$.
17. Каково уравнение нормальной плоскости?
18. Что называется сопровождающим трехгранником пространственной кривой?
19. Определения кривизны и кручения кривой в точке. Формулы для их расчета.
20. Определение единичных векторов касательной $\vec{\tau}$, нормали $\vec{\nu}$, бинормали $\vec{\beta}$ пространственной кривой в заданной точке.
21. Знать, как составить уравнения соприкасающейся, спрямляющей и нормальной плоскостей кривой $\vec{r} = \vec{r}(t)$ при $t = t_0$.
22. Формулы Френе-Серре.

Библиографический список

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т.1.− М.:Интеграл-Пресс. 2007.− 416с.
2. Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа/ Под ред. А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича. − М.: Наука. 1981.− 463 с.
3. Данко П. Е., ПоповА.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1. − М.: Высшая школа. 1980. − 320 с.
4. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. − М.: Наука. 1974. − 176с.
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). − М.: Наука. 1974. −831 с.