

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Емельянов Сергей Геннадьевич
Должность: ректор
Дата подписания: 04.02.2021 18:59:27
Уникальный программный ключ:
9ba7d3e34c012eba476ffd2d064cf2781953be730df2374d16f50ce576f06c9

1

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Юго-Западный государственный университет»

Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Первый проректор-
Проректор по учебной работе
_____ Е.А. Кудряшов
«__» _____ 2011 г.

***ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ
ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ***

Методические указания к ЛР-6

КУРСК 2011

УДК 519

Составители: Е.А.Бойцова, Е.В.Журавлева

Рецензент

Кандидат физ.-мат. наук, с.н.с. В.И.Дмитриев

Приближенное вычисление определенных интегралов: методические указания к ЛР-6 / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Е.А.Бойцова, Е.В.Журавлева. Курск, 2011. 12 с.: ил. 4, табл. 1. Библиогр.: 2 назв.

Излагаются методические рекомендации по вычислению определенных интегралов приближенными методами: прямоугольников, трапеций, Симпсона. Проводится разбор примеров с применением программного продукта МATHCAD.

Методические указания предназначены для студентов всех специальностей.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 02.06/11 Формат 60x84 1/16.

Усл. печ. л. 0,7. Уч.-изд. л. 0,6. Тираж 50 экз. Заказ 39. Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет.

305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Содержание

1. Задание	4
2. Теоретические положения	5
2.1. Введение.....	5
2.2. Метод прямоугольников	7
2.3. Метод трапеций	9
2.4. Метод парабол	10
3. Образец выполнения задания.....	11
Контрольные вопросы	12
Библиографический список.....	13

- Цель работы:** 1. Изучить приближенные методы вычисления определенного интеграла.
2. Освоить методику применения ЭВМ к приближенному вычислению определенного интеграла.
3. Решить индивидуальное задание.

1. Задание

Вычислить значение определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ с помощью:

- а) формулы прямоугольников;
 б) формулы трапеций;
 в) формулы парабол (формулы Симпсона).

Число узлов взять равным $n = 10$.

Сравнить полученные значения между собой.

Индивидуальные задания взять из таблицы 1.1

Таблица 1.1

Индивидуальные задания

n	$\int_a^b f(x)dx$	n	$\int_a^b f(x)dx$	n	$\int_a^b f(x)dx$
1	$\int_0^1 \frac{(x^2 + 1)dx}{(x^3 + 3x + 1)^2}$	2	$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{1 - \cos x}{(x - \sin x)^2} dx$	3	$\int_1^e \frac{x^2 + \ln x^2}{x} dx$
4	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 \cos x + 3 \sin x}{(2 \sin x - 3 \cos x)^3} dx$	5	$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cos x + \sin x}{(x \sin x)^2} dx$	6	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{(\sin x + \cos x)^5} dx$
7	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{(\sin x + \cos x)^5} dx$	8	$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin \frac{2x^2}{5} dx$	9	$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$

Продолжение таблицы 1.1

n	$\int_a^b f(x)dx$	n	$\int_a^b f(x)dx$	n	$\int_a^b f(x)dx$
10	$\int_1^e \ln(x^2 + 1)dx$	11	$\int_8^{10} \sqrt{\frac{18-x}{x-6}}dx$	12	$\int_1^3 \frac{\ln(x+3)}{x}dx$
13	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{3x^2}{5} dx$	14	$\int_1^5 \frac{5^x}{7x-1} dx$	15	$\int_1^{\frac{3}{2}} \lg \frac{2-x}{1+x} dx$
16	$\int_e^{2e} \ln(x-1)^2 dx$	17	$\int_{-1}^1 x \cdot e^{-(x+1)^2} dx$	18	$\int_0^e \ln^2(x+4)dx$
19	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} \frac{(2-x)^2}{4} dx$	20	$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{x + \cos x}{x^2 + 2 \sin x} dx$	21	$\int_{1/2}^{3/4} \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x-x^2}} dx$
22	$\int_2^9 \frac{x}{\sqrt[3]{x-1}} dx$	23	$\int_1^3 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)} dx$	24	$\int_1^3 \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\sqrt{x(1+x)}} dx$
25	$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{x} dx$	26	$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\cos x}{x} dx$	27	$\int_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{e^x}{x} dx$
28	$\int_2^4 \frac{(1/\sqrt{4x})+1}{(x+\sqrt{x})^2} dx$	29	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x \cdot \ln(\cos x) dx$	30	$\int_1^3 \frac{x^2}{\sqrt{25-x^2}} dx$

2. Теоретические положения

2.1. Введение

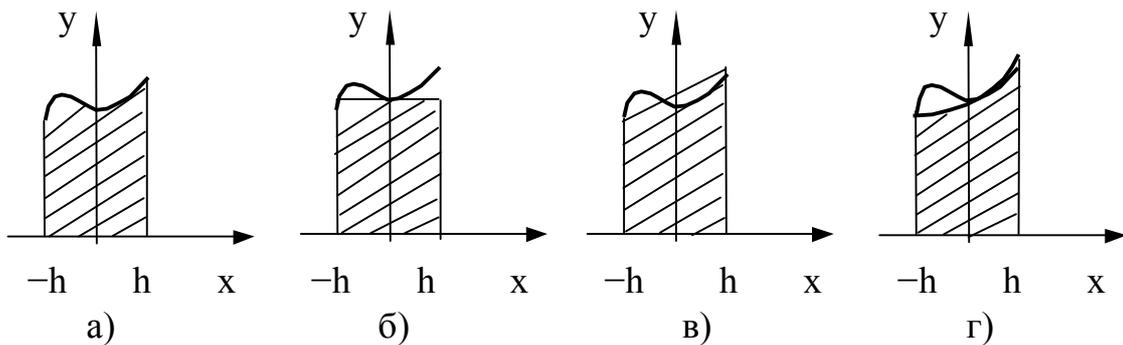
Если функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ и известна её первообразная $F(x)$ (где $f(x)=F'(x)$), то определённый интеграл от этой функции в пределах от “ a ” до “ b ” может быть вычислен по

формуле Ньютона – Лейбница: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Однако, не для всякой непрерывной функции, ее первообразная выражается через элементарные функции. В этих случаях вычисление определенных интегралов по формуле Ньютона-Лейбница невозможно. Кроме того, выражение для первообразной может оказаться очень сложным. В этих случаях, как правило, применяют различные приближенные методы вычисления определенных интегралов.

Наиболее распространёнными приближенными методами вычисления определенных интегралов являются: метод прямоугольников, метод трапеций и метод парабол (метод Симпсона).

Основная идея этих методов заключается в замене подынтегральной функции $f(x)$ функцией более простой природы – многочленом, совпадающим с $f(x)$ в некоторых точках.



Рассмотрим при малых h интеграл $\int_{-h}^h f(x)dx$, представляющий

собой площадь криволинейной трапеции, лежащей под графиком функции $y=f(x)$ на отрезке $[-h, h]$ (см. рис.2.1.а).

Заменим функцию $f(x)$ многочленом нулевого порядка, а именно константой $f(0)$. При этом интеграл $\int_{-h}^h f(x)dx$ приближенно заменится площадью заштрихованного прямоугольника (рис.2.1.б.)

Заменим функцию $f(x)$ многочленом первого порядка, а именно линейной функцией $y = kx + b$, совпадающей с $f(x)$ в точках $-h$ и h . При этом интеграл $\int_{-h}^h f(x)dx$ приближенно заменится площадью заштрихованной прямоугольной трапеции (рис.2.1.в)

Заменяем, наконец, функцию $f(x)$ многочленом второго порядка, т.е. параболой $y = ax^2 + bx + c$, совпадающей с $f(x)$ в точках $-h, 0, h$.

При этом интеграл $\int_{-h}^h f(x)dx$ приближенно заменится площадью заштрихованной фигуры, лежащей под параболой (рис.2.1.г.)

Если требуется вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$ по любому отрезку $[a, b]$, то естественно этот отрезок разбить на достаточно большое число малых отрезков и к каждому из этих отрезков применить изложенные рассуждения. При этом мы и приходим к методам прямоугольников, трапеций и парабол в их общем виде.

2.2. Формула прямоугольников

Пусть требуется вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей при помощи точек $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{2n} = b$. Обозначим через x_{2k-1} среднюю точку отрезка $[x_{2k-2}, x_{2k}]$. Метод прямоугольников состоит в замене интеграла $\int_a^b f(x)dx$ суммой $\frac{b-a}{n}(f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{2n-1}))$ площадей прямоугольников с высотами соответственно равными $f(x_{2k-1})$, и основаниями, равными $x_{2k} - x_{2k-2} = \frac{b-a}{n}$ (рис.2.2).

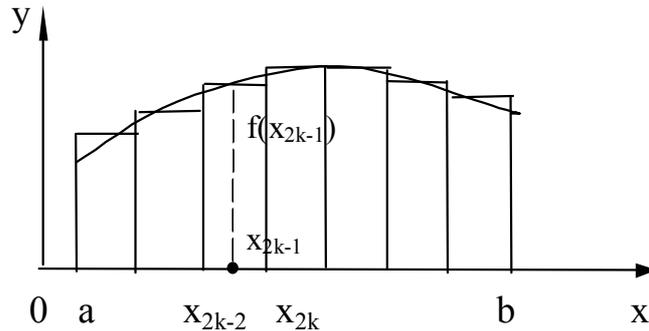


Рис.2.2

Таким образом, справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n} [f(x_1) + (f(x_3) + \dots + f(x_{2n-1}))] + R, \quad (2.1)$$

где R – остаточный член. Формула (2.1) называется формулой прямоугольников.

Можно доказать, что если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ непрерывную вторую производную, то на этом отрезке найдется такая точка η , что остаточный член R в формуле (2.1) равен

$$R = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\eta) \quad (2.2)$$

Кроме того, можно доказать, что ошибка, совершаемая при замене криволинейной трапеции на прямоугольник, имеет порядок $\left(\frac{b-a}{n}\right)^3$. Таким образом, формула (2.1) тем точнее, чем меньше $\frac{b-a}{n}$.

2.3. Формула трапеций

Пусть требуется вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей при помощи точек $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ (рис.2.3).

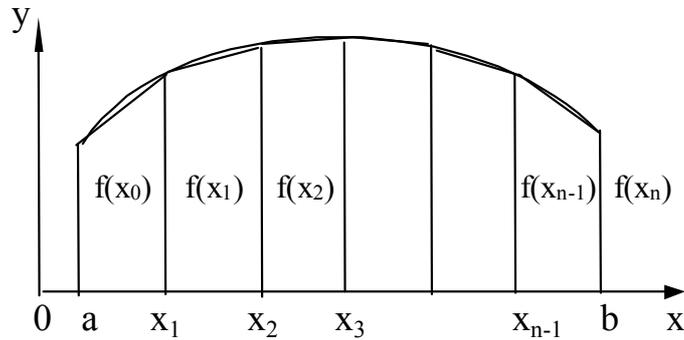


Рис.2.3

Метод трапеций состоит в замене интеграла $\int_a^b f(x)dx$ суммой

$$\begin{aligned} & \frac{b-a}{2n} ((f(x_0) + f(x_1)) + (f(x_1) + f(x_2)) + \dots + (f(x_{n-1}) + f(x_n))) = \\ & = \frac{b-a}{2n} (f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)), \end{aligned}$$

площадей трапеций с основаниями, соответственно равными $f(x_{k-1})$ и $f(x_k)$, и с высотами, равными $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$.

Таким образом справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2n} (f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)) + R, \quad (2.3)$$

где R – остаточный член. Формула (2.3) называется формулой трапеций.

Можно доказать, что если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ непрерывную вторую производную, то на этом отрезке найдется такая точка η , что остаточный член R в формуле (2.3) имеет вид

$$R = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\eta). \quad (2.4)$$

Кроме того, можно доказать, что ошибка, совершаемая при замене криволинейной трапеции на прямоугольную трапецию, имеет

порядок $\left(\frac{b-a}{n}\right)^3$.

2.4. Формула парабол (формула Симпсона)

Для вычисления интеграла $\int_a^b f(x)dx$ разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей при помощи точек $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{2n} = b$ и обозначим через x_{2k-1} середину отрезка $[x_{2k-2}, x_{2k}]$. Метод парабол заключается в замене интеграла $\int_a^b f(x)dx$ суммой

$$\begin{aligned} & \frac{b-a}{6n} ([f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + [(f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4))] + \dots + \\ & + [(f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n}))]) = \\ & = \frac{b-a}{6n} (f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k}) + 4 \sum_{k=1}^n f(x_{2k-1})) \end{aligned}$$

площадей фигур, (рис.2.4) представляющих собой криволинейные трапеции, лежащие под параболой, проходящими через три точки графика функции $f(x)$ с абсциссами $x_{2k-2}, x_{2k-1}, x_{2k}$.

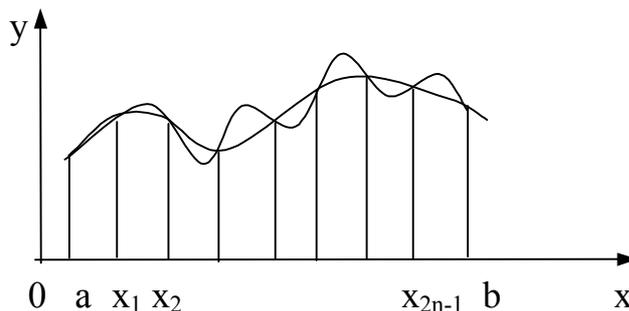


Рис.2.4

Таким образом, справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6n} (f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k}) + 4 \sum_{k=1}^n f(x_{2k-1})) + R, \quad (2.5)$$

где R – остаточный член. Формула (2.5) называется формулой парабол или формулой Симпсона.

Можно доказать, что если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ непрерывную четвертую производную, то на этом отрезке найдется такая точка η , что остаточный член R в формуле (2.5) равен

$$R = -\frac{(b-a)^5}{2880n^4} f^{(4)}(\eta). \quad (2.6)$$

Кроме того, можно доказать, что ошибка, совершаемая при замене определенного интеграла указанной площадью, имеет порядок $\left(\frac{b-a}{n}\right)^5$.

3. Образец выполнения задания

Замечание. В дальнейшем изложении текст, выделенный курсивом, носит пояснительный характер и включается в отчет по лабораторной работе.

Введем пределы интегрирования, подынтегральную функцию и число разбиений

$$a := 0,1 \quad b := 2$$

$$f(x) := \frac{\sin x}{x} \quad n = 10$$

Зададим шаг и формулу нахождения координат точек деления отрезка $[a, b]$

$$h := \frac{b-a}{n}$$

$$i := 1 \dots 19$$

$$x_i = a + i \cdot \frac{n}{2}$$

Пояснение. Здесь, при четных $i = 2k$ получаем координаты точек деления отрезка на десять равных частей при нечетных $i = 2k - 1$ - средние точки частичных отрезков.

а) Применим формулу прямоугольников и найдем соответствующее приближенное значение определенного интеграла

$$S_1 := h \cdot \sum_{k=1}^n f(x_{2k-1})$$

$$S_1 = 1.506.$$

б) Используем формулу трапеций для вычисления того же интеграла

$$S_2 := \frac{h}{2} \left(f(a) + f(b) + 2 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) \right)$$

$$S_2 = 1.504.$$

в) По формуле Симпсона найдем

$$S_3 := \frac{h}{6} \left(f(a) + f(b) + 2 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k}) + 4 \sum_{k=1}^n f(x_{2k-1}) \right)$$

$$S_3 = 1.505.$$

Вычислим точное значение заданного интеграла

$$J := \int_a^b f(x) dx$$

$$J = 1.505$$

Сравнивая полученные приближенные значения между собой и с истинным значением, видим преимущество формулы Симпсона перед двумя другими формулами, а погрешность вычисления по формуле трапеций и прямоугольников приблизительно одинаковая.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение определенного интеграла.
2. Объясните, в чем заключается геометрический смысл определенного интеграла.
3. Изложите кратко суть метода прямоугольников.
4. Запишите формулу для приближенного вычисления определенного интеграла методом прямоугольников при числе узлов $n=4$.

5. Запишите формулу для приближенного вычисления определенного интеграла методом трапеций при числе узлов $n=4$.
6. Запишите формулу для приближенного вычисления определенного интеграла методом Симпсона при числе узлов $n=6$.
7. Дайте оценку погрешности для каждого из методов.

Библиографический список

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. ч.1. М.: Наука, 1982, 616с.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Наука, 1980, 432с.