9ba7d3e34c012eba476ffd2d064cf2781953be730df2374d16f3c0ce536f0fc6

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Юго-Западный государственный университет»

Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
________ О.Г. Локтионова
«___» __________ 2013 г.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

Методические указания по выполнению лабораторной работы

КУРСК 2013

УДК 519

Составитель Е.А.Бойцова

Рецензент
Кандидат пед. наук, *Л.И. Студеникина*

Интегрирование рациональных дробей: Методические указания по выполнению лабораторной работы / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Е.А.Бойцова. Курск, 2013. 12 с.: ил. 4, табл. 1. Библиогр.: 2 назв.

Излагаются методические рекомендации по интегрированию рациональных дробей. Проводится разбор примеров с применением программного продукта MATHCAD.
Предназначено для студентов всех специальностей.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 0,7. Уч.-изд. л. 0,6. Тираж экз. Заказ . Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Содержание

Цель работы: 1. Изучить методы разложения многочлена на неприводимые множители

2. Изучить методы представления рациональной дроби в виде суммы простейших дробей.
3. Освоить методику интегрирования рациональных дробей
4. Освоить методику применения ЭВМ при представлении рациональной дроби в виде суммы простейших дробей.
5. Решить индивидуальное задание.

1. Теоретические положения

1.1 *Основные понятия*

Многочленом n-й степени называется выражение вида

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

где a_i – коэффициенты многочлена, действительные числа, число n - называется степенью многочлена.

Корнем многочлена называется такое значение x_1 (действительное или комплексное), при котором многочлен обращается в нуль, т.е. $P_n(x) \equiv 0$.

Если x_1 есть корень многочлена $P_n(x)$, то $P_n(x)$ делится без остатка на $(x-x_1)$, т. е. $P_n(x)=(x-x_1)Q_{n-1}(x)$*(следствие из теоремы Безу)*.

Если многочлен $P_n(x)$ делится без остатка на $(x-x_1)^k$ (k - натуральное число) и не делится на $(x-x_1)^{k+1}$, то число k называется кратностью корня. $P_n(x)=(x-x_1)^k Q_{n-k}(x)$

1.2 *Разложение многочлена на неприводимые множители*

Всякий многочлен степени n разлагается на n линейных множителей вида $(x-x_1)$ и множитель, равный коэффициенту при x^n, т. е. $P_n(x)=a_n(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$.

Всякий многочлен n-ой степени имеет ровно n корней (действительных или комплексных).

Если многочлен $P_n(x)$с действительными коэффициентами имеет комплексный корень $a+bi$, то он имеет и сопряженный ему корень a-bi.

Многочлен с действительными коэффициентами разлагается на множители с действительными коэффициентами первой и второй степени соответствующей кратности, т.е.

$$P_n(x) = a_n(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}...(x-x_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}...(x^2+p_sx+q_s)^{m_s}$$

где $k_1+k_2+...+k_r+m_1+...+m_s=n$.

Пример: Разложить на множители $P_5(x)=x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$

Сгруппируем слагаемые $P_5(x)=(x^5+x^4+x^3)+(x^2+x+1)=$
$=x^3(x^2+x+1)+(x^2+x+1)=(x^2+x+1)(x^3+1)=(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x+1)$.
Дискриминанты многочленов (x^2+x+1) и (x^2-x+1) – отрицательны, следовательно, они являются неприводимыми множителями.

1.3 *Интегрирование рациональных дробей*

Всякую рациональную функцию можно представить в виде рациональной дроби, т. е. в виде отношения двух многочленов

$$\frac{Q(x)}{f(x)} = \frac{B_0x^m + B_1x^{m-1} + ... + B_m}{A_0x^n + A_1x^{n-1} + ... + A_n}$$

Не ограничивая общности рассуждений, будем предполагать, что эти многочлены не имеют общих корней.

Если степень числителя меньше степени знаменателя, то дробь называется правильной, в противном случае дробь называется неправильной.

Если дробь неправильная, то, разделив числитель на знаменатель, можно представить данную дробь в виде суммы многочлена и некоторой правильной дроби:

$$\frac{Q(x)}{f(x)} = M(x) + \frac{F(x)}{f(x)}$$

здесь $M(x)$- многочлен, а $\frac{F(x)}{f(x)}$ - правильная дробь.

Пример: $$\frac{3x^4-5}{x^2+3x-1} = 3x^2-9x+30-\frac{99x-25}{x^2+3x-1}.$$

Так как интегрирование многочленов не вызывает затруднений, то основная трудность при интегрировании рациональных дробей заключается в интегрировании правильных рациональных дробей.

Правильные рациональные дроби вида:

I. $\dfrac{A}{x-a}$; II. $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ $\left(\begin{matrix} k\text{-целое положи-} \\ \text{тельное число} \geq 2 \end{matrix}\right)$

III. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$ $\left(\begin{matrix} \text{корни знаменателя} \\ \text{комплексные} \end{matrix}\right)$

IV. $\dfrac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}$ $\left(\begin{matrix} k\text{- целое } \geq 2, \\ \text{корни заменателя} \\ \text{комплексные} \end{matrix}\right)$

называются простейшими дробями I, II, III, IV типов.

Пусть требуется вычислить $\int \dfrac{Q(x)}{P(x)}dx$, если дробь, стоящая под знаком интеграла, неправильная, то мы представим ее в виде суммы многочлена $M(x)$ и правильной рациональной дроби $\dfrac{F(x)}{f(x)}$. Вид простейших дробей определяется корнями знаменателя $f(x)$. Здесь возможны следующие случаи:

I случай: Корни знаменателя действительные и различные, т. е. $f(x)=(x-a)(x-b)\dots(x-d)$. Тогда будем иметь:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \dots + \frac{D}{x-d}$$

и, следовательно,

$$\int \frac{F(x)}{f(x)}dx = \int \frac{A}{x-a}dx + \int \frac{B}{x-b}dx + \dots + \int \frac{D}{x-d} =$$

$$= A \cdot ln|x-a| + B \cdot ln|x-b| + \dots + D \cdot ln|x-d| + C$$

II случай: Корни знаменателя действительные, причем некоторые из них кратные, т. е. $f(x)=(x-a)^n(x-b)^k\dots(x-d)^m$.

В этом случае дробь $\dfrac{F(x)}{f(x)}$ разлагается на простейшие дроби типа:

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A_n}{(x-a)^n}+\frac{A_{n-1}}{(x-a)^{n-1}}+\ldots+\frac{A_1}{x-a}+\frac{B_k}{(x-b)^k}+\frac{B_{k-1}}{(x-b)^{k-1}}+\ldots+$$

$$+\frac{B_1}{x-b}+\ldots+\frac{D_m}{(x-d)^m}+\frac{D_{m-1}}{(x-d)^{m-1}}+\ldots+\frac{D_1}{x-d}$$

и мы приходим к интегралам от степенных функций.

III случай: Среди корней знаменателя есть комплексные не повторяющиеся, т. е. $f(x)=(x^2+px+q)(x^2+lx+k)\ldots(x^2+sx+r)$.

В этом случае дробь $\frac{F(x)}{f(x)}$ разлагается на простейшие дроби типа:

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{Ax+B}{x^2+px+q}+\frac{Mx+N}{x^2+lx+k}+\ldots+\frac{Cx+D}{x^2+sx+r}$$

и мы приходим к интегралам, содержащим квадратный трехчлен в знаменателе.

IV случай: Среди корней знаменателя есть комплексные кратные, т. е. $f(x)=(x^2+px+q)^m(x^2+lx+k)^n\ldots(x^2+sx+r)^v$.

В этом случае дробь $\frac{F(x)}{f(x)}$ разлагается на простейшие дроби типа:

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A_nx+B_n}{(x^2+px+q)^n}+\ldots+\frac{A_1x+B_1}{x^2+px+q}+\frac{M_mx+N_m}{(x^2+lx+k)^m}+\ldots+$$

$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+lx+k}+\frac{C_vx+D_v}{(x^2+sx+r)^v}+\ldots+\frac{C_1x+D_1}{x^2+sx+r}$$

2. Задание

Вычислить интеграл $\int\frac{P_5(x)}{Q_6(x)}dx$

1. Разложить знаменатель $Q_6(x)$ на неприводимые множители.
2. Представить дробь $\frac{P_5(x)}{Q_6(x)}$ в виде суммы простейших дробей с неопределёнными коэффициентами.
3. Найти полученные интегралы с использованием MATHCAD.
4. Найти вручную полученные интегралы от простейших дробей.
5. Значения $P_5(x)$ и $Q_6(x)$ взять из таблицы 1.

Таблица 1

№	$P_5(x)$	$Q_6(x)$
1	$6x^5+17x^4-27x^3+12x^2-19x+9$	$x^6+3x^5-9x^4+4x^3-3x^2+9x-5$
2	$2x^5-2x^4-22x^3-13x^2+43x+43$	$-2x^6-5x^5-x^4+x^3-11x^2-16x-6$
3	$8x^5+36x^4-13x^3-286x^2-163x+490$	$-x^6-3x^5+17x^4+70x^3+117x^2+405x+675$
4	$14x^5-127x^4+403x^3-530x^2+373x+315$	$3x^6-17x^5+6x^4+58x^3+99x^2-297x-108$
5	$7x^5-51x^4+159x^3-260x^2+207x-63$	$2x^6-15x^5+45x^4-71x^3+66x^2-36x+8$
6	$7x^5+23x^4+7x^3-51x^2-69x-52$	$-x^6-6x^5-14x^4-17x^3-6x^2+20x+24$
7	$4x^5+4x^4-68x^3+21x^2+536x+321$	$-x^6-5x^5+2x^4+24x^3-27x^2-27x+162$
8	$2x^5+51x^4+387x^3+1189x^2+1206x-230$	$-x^6-11x^5-32x^4+38x^3+328x^2+544x+384$
9	$9x^5-4x^4-31x^3-48x^2-27x-9$	$3x^6+11x^5+23x^4+30x^3+17x^2-x-3$
10	$5x^5-16x^4+34x^3-7x^2-30x+20$	$-2x^6+7x^5-12x^4+12x^3-4x^2-3x+2$
11	$4x^5-x^4-36x^3+16x^2+120x-121$	$-2x^6+13x^5-29x^4+25x^3-14x^2+28x-24$
12	$5x^5+13x^4-78x^3+179x^2-257x+158$	$x^6-x^5-6x^4+34x^3-71x^2+63x-20$
13	$7x^5+42x^4+15x^3-212x^2+50x+512$	$x^6+x^5-11x^4-22x^3-28x^2-88x-96$

Продолжение таблицы 1

14	$76x^5+158x^4+103x^3+4x^2-27x-11$	$8x^6+28x^5+46x^4+45x^3+26x^2+8x+1$
15	$96x^5-186x^4+76x^3+86x^2-80x+27$	$8x^6-4x^5-14x^4+33x^3-31x^2+13x-2$
16	$3x^5-14x^4-16x^3-18x^2-6x+1$	$4x^6+13x^5+16x^4+10x^3+4x^2+x$
17	$-51x^5+151x^4-95x^3+2x^2+5$	$9x^6-25x^5+22x^4-6x^3+x^2-x$
18	$16x^5+68x^4+73x^3+91x^2+165x-121$	$4x^6+51x^5+204x^4+327x^3+186x^2+36x+56$
19	$48x^5-304x^4+659x^3-567x^2-64x+24$	$9x^6-57x^5+19x^4+480x^3-891x^2+297x-81$
20	$88x^5-76x^4-58x^3+93x^2+77x+19$	$32x^6-32x^5-136x^4-140x^3-76x^2-23x-3$
21	$16x^5+18x^4-8x^3-17x^2+2$	$3x^6+5x^5+4x^4-2x^3$
22	$49x^5+98x^4+102x^3-75x^2-73x-14$	$5x^6+27x^5+45x^4+14x^3$
23	$25x^5+49x^4+119x^3+96x^2-143x-56$	$3x^6+10x^5+31x^4+56x^3$
24	$-7x^5-21x^4-139x^3-250x^2-79x-24$	$6x^6+17x^5+39x^4+71x^3+59x^2+12x-4$
25	$25x^5-73x^4+125x^3-60x^2+34x+159$	$5x^6-13x^5+54x^4-116x^3+79x^2+9x-18$
26	$-5x^5+57x^4+720x^3+100x^2-906x+994$	$3x^6+26x^5-53x^4-445x^3+1204x^2-49x-686$

3. Образец выполнения задания

Вычислить интеграл $\int \frac{7x^5+51x^4+125x^3+130x^2+185x+70}{x^6+7x^5+13x^4+x^3-18x^2-108x-216}dx$

Разложим знаменатель $Q_6(x)=x^6+7x^5+13x^4+x^3-18x^2-108x-216$ на неприводимые множители. Для этого воспользуемся символьным оператором «factor», т.е.

$x^6+7\cdot x^5+13\cdot x^4+x^3-18\cdot x^2-108\cdot x-216$ factor $\rightarrow (x-2)\cdot(x+3)^3\cdot(x^2+4)$

Представим исходную дробь в виде суммы простых дробей с неопределенными коэффициентами

$$\frac{P_5(x)}{Q_6(x)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{(x+3)^2}+\frac{D}{(x+3)^3}+\frac{Fx+E}{x^2+4}$$

Воспользуемся символьным оператором «parfrac» и разложим данную дробь на сумму простых дробей

$$\frac{7x^5+51x^4+125x^3+130x^2+185x+70}{x^6+7x^5+13x^4+x^3-18x^2-108x-216}\, convert, parfrac, x \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{3}{x-2}+\frac{2}{x+3}+\frac{1}{(x+3)^2}+\frac{4}{(x+3)^3}+\frac{2x+1}{x^2+4}$$

Далее <u>проинтегрируем</u> получившееся выражение, используя символьный оператор «$\rightarrow$»

$$\int\left[\frac{3}{x-2}+\frac{2}{x+3}+\frac{1}{(x+3)^2}+\frac{4}{(x+3)^3}+\frac{2\cdot x+1}{x^2+4}\right]dx \rightarrow$$

$$\rightarrow 3\cdot\ln(x-2)-\frac{2}{(x+3)^2}-\frac{1}{(x+3)}+2\cdot\ln(x+3)+\ln(x^2+4)+\frac{1}{2}\cdot\operatorname{atan}(\frac{1}{2}\cdot x)$$

Вычислим вручную неопределённые интегралы от каждой из полученных простых дробей:

$$\int \frac{3}{x-2}dx = 3\cdot\ln(x-2)+C; \quad \int \frac{2}{x+3}dx = 2\cdot\ln(x+3)+C;$$

$$\int \frac{2}{(x+3)^2}dx = 2\cdot\frac{(x+3)^{-2+1}}{-2+1}+C = -\frac{2}{x+3}+C;$$

$$\int \frac{2}{(x+3)^3}dx = 2\cdot\frac{(x+3)^{-3+1}}{-3+1}+C = -\frac{1}{(x+3)^2}+C;$$

$$\int \frac{2x+1}{x^2+4}dx = \int \frac{2xdx}{x^2+4}+\int \frac{dx}{x^2+4} = \int \frac{d(x^2+4)}{x^2+4}+\frac{1}{2}\cdot arctg\left(\frac{x}{2}\right) =$$

$$= \ln(x^2+4)+\frac{1}{2}\cdot arctg\left(\frac{x}{2}\right)+C.$$

Тогда интеграл от суммы нескольких функций равен сумме интегралов от каждой из этих функций, т.е. будем иметь

$$\int \left[\frac{3}{x-2}+\frac{2}{x+3}+\frac{1}{(x+3)^2}+\frac{4}{(x+3)^3}+\frac{2\cdot x+1}{x^2+4}\right]dx =$$

$$= \int \frac{3}{x-2}dx + \int \frac{2}{x+3}dx + \int \frac{dx}{(x+3)^2} + \int \frac{4}{(x+3)^3}dx + \int \frac{2\cdot x+1}{x^2+4}dx =$$

$$= 3\cdot\ln(x-2)+2\cdot\ln(x+3)-\frac{1}{(x+3)}-\frac{2}{(x+3)^2}+\ln(x^2+4)+\frac{1}{2}\cdot\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)+C.$$

Контрольные вопросы

1.Дайте понятие многочлена *n*-й степени.
2. Что называется корнем многочлена?
3. Дайте понятие кратности корня.
4. Дайте понятие комплексного числа.
5. Сколько корней имеет многочлен *n*-й степени?
6. Укажите символьный оператор системы MATHCAD, используемый для разложения многочлена на неприводимые множители.
7. Какая дробь называется правильной?
8. Дайте понятие правильной и неправильной рациональной дроби.

9. Дайте понятие простейшей дроби. Укажите основные типы простейших дробей.
10. Укажите символьный оператор системы MATHCAD, используемый для разложения правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей.
11. Укажите символьный оператор системы MATHCAD, используемый для нахождения неопределённых интегралов.

Библиографический список

1. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления [Текст] : учебное пособие. Т. 1 / Н. С. Пискунов. - изд., стер. - М. : Интеграл-Пресс, 2007. - 416 с. - ISBN 5-89602-012-0
2. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : Учеб. пособие: В 2 ч. Ч. 1 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевников. - 5-е изд., испр. - М. : Высшая школа, 1999. - 304 с. : ил. - ISBN 5-06-003070-9.
3. Шипачев В. С. Высшая математика : Учебник для студ. вуз. / В. С. Шипачев. - 4-е изд., стер. - М. : Высшая школа, 1998. - 479 с.
4. Запорожец Г. И. Руководство к решению задач по математическому анализу [Текст] : учебное пособие / Григорий Иванович Запорожец. - 6-е изд., стер. - СПб. : Лань, 2010. - 464 с. : ил. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - ISBN 978-5-8114-0912-9 :