

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Емельянов Сергей Геннадьевич
Должность: ректор
Дата подписания: 01.02.2021 17:06:14
Уникальный программный ключ:
9ba7d3e34c012eba476ffd2d064cf2781953be730df2374d16f3c0ce536f0fc6

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное бюджетное государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра высшей математики



УТВЕРЖДАЮ

Ректор по учебной работе

О.Г. Локтионова

2013 г.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.
МЕТОД АДАМСА И РУНГЕ-КУТТА

Методические указания по выполнению лабораторной работы

КУРСК 2013

УДК 519

Составитель Е.А.Бойцова

Рецензент

Кандидат пед. наук, доцент Л.И. Студеникина

Численное решение дифференциальных уравнений. Метод Адамса и Рунге-Кутта: методические указания по выполнению лабораторной работы/ Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Е.А.Бойцова. Курск, 2013. 12 с.: ил. 4, табл. 1. Библиогр.: с.18.

Излагаются основные численные методы решения задачи Коши обыкновенного дифференциального уравнения: метод Адамса и метод Рунге-Кутта. Проводится разбор примеров с применением программного продукта MATHECAD.

Методические указания предназначены для студентов всех специальностей.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать Формат 60x84 1/16.

Усл. печ. л. 0,7. Уч.-изд. л. 0,6. Тираж ____ экз. Заказ ____ . Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет.

305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Содержание

I. Краткие теоретические положения	4
1. Основные понятия. Задача Коши.....	4
2. Метод Рунге-Кутты для решения задачи Коши.....	5
3. Метод Адамса для решения задачи Коши.....	6
II. Задание.....	7
1. Образец выполнения задания.....	8
Контрольные вопросы	18
Библиографический список.....	18

- Цель работы:**
1. Изучение основных положений теории дифференциальных уравнений.
 2. Изучение основных численных методов решения задачи Коши обыкновенного дифференциального уравнения.
 3. Изучение методов Адамса и Рунге-Кутты решения обыкновенного дифференциального уравнения.
 4. Разработка алгоритма, программы и решение на ЭВМ обыкновенного дифференциального уравнения методами Рунге-Кутты и Адамса.

I. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

1. Основные понятия. Задача Коши.

Определение: Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее функцию $y(x)$, аргумент x и производные функции $y', y'', \dots, y^{(n)}$.

В общем случае дифференциальное уравнение можно записать в виде $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$.

Так как искомая функция $y = y(x)$, фигурирующая в уравнении, есть функция одного аргумента, то дифференциальное уравнение называют в этом случае *обыкновенным дифференциальным уравнением*.

Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид $F(x, y, y') = 0$. Уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной, будет иметь вид:

$$y' = f(x, y) \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1.1)$$

Обычно такое уравнение имеет бесконечно много решений $y = y(x)$, и выделение одного конкретного (частного) решения осуществляется предъявлением к решению дополнительных требований. Часто, например, ставится так называемая задача Коши: среди всех решений дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y)$$

найти такое решение $y = y(x)$, которое при заданном значении $x = x_0$ аргумента принимает заданное значение y_0 :

$$y(x_0) = y_0 \quad (1.2)$$

Числа x_0, y_0 называются при этом начальными данными, а условие (1.2) - начальным условием.

Равенство $\Phi(x, y, C) = 0$, неявно задающее общее решение, называется общим интегралом дифференциального уравнения.

Определение: Частным решением называется любая функция $y = \varphi(x, C_0)$, которая получается из общего решения $y = \varphi(x, C)$, если в последнем придать C конкретное значение $C = C_0$.

Соотношение $\Phi(x, y, C_0) = 0$ называется в этом случае частным интегралом.

2. Метод Рунге-Кутты для решения задачи Коши

Пусть дано дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y) \quad (2.1)$$

при начальном условии $y = y_0$ при $x = x_0$.

Требуется на данном промежутке $x_0 \leq x \leq X$ найти решение $y(x)$ уравнения (2.1) с заданной степенью точности ε . Для этого выберем шаг вычислений $h = \frac{X - x_0}{n}$, деля отрезок $[x_0, X]$ на n равных частей

так, чтобы $h^4 < \varepsilon$. Точки деления отрезка определим по формуле $x_i = x_0 + i \cdot h$ ($i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$). Соответствующие значения $y_i = y(x_i)$ искомой функции по методу Рунге-Кутты последовательно вычисляются по формулам:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$$

где $\Delta y_i = \frac{1}{6} (k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)})$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$,

$$\begin{aligned}
k_1^{(i)} &= f(x_i, y_i) \cdot h, \\
k_2^{(i)} &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right) \cdot h, \\
k_3^{(i)} &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right) \cdot h, \\
k_4^{(i)} &= f(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}) \cdot h.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Грубую оценку погрешности метода Рунге-Кутты на данном промежутке $[x_0, X]$ можно получить, исходя из принципа Рунге:

$R = \frac{|y_{2m} - \tilde{y}_m|}{15}$, где $n=2m$, y_{2m} , \tilde{y}_m результаты вычислений по схеме (2.2) с шагом h и $2h$.

3. Метод Адамса для решения задачи Коши

Для решения уравнения (2.1) по методу Адамса, исходя из начальных условий $y(x_0) = y_0$ мы находим методом Рунге-Кутты следующие три значения искомой функции $y(x)$:

$$y_1 = y(x_1) = y(x_0 + h), \quad y_2 = y(x_2) = y(x_0 + 2h), \quad y_3 = y(x_3) = y(x_0 + 3h)$$

Находим далее величины

$$\begin{aligned}
q_0 &= h \cdot y_0' = h \cdot f(x_0, y_0), & q_1 &= h \cdot y_1' = h \cdot f(x_1, y_1), \\
q_2 &= h \cdot y_2' = h \cdot f(x_2, y_2), & q_3 &= h \cdot y_3' = h \cdot f(x_3, y_3).
\end{aligned}$$

Составим диагональную таблицу конечных разностей значений q :

x_n	y_n	$\Delta y_n =$ $= y_{n+1} - y_n$	$y_n' =$ $= f(x_n, y_n)$	$q_n =$ $= y_n' \cdot h$	$\Delta q_n =$ $= q_{n+1} - q_n$	$\Delta^2 q_n =$ $= \Delta q_{n+1} - \Delta q_n$	$\Delta^3 q_n =$ $= \Delta^2 q_{n+1} - \Delta^2 q_n$
x_0	y_0	Δy_0	$f(x_0, y_0)$	q_0	Δq_0	$\Delta^2 q_0$	$\Delta^3 q_0$
x_1	y_1	Δy_1	$f(x_1, y_1)$	q_1	Δq_1	$\Delta^2 q_1$	$\Delta^3 q_1$
x_2	y_2	Δy_2	$f(x_2, y_2)$	q_2	Δq_2	$\Delta^2 q_2$	$\Delta^3 q_2$
x_3	y_3	Δy_3	$f(x_3, y_3)$	q_3	Δq_3	$\Delta^2 q_3$	
x_4	y_4	Δy_4	$f(x_4, y_4)$	q_4	Δq_4		
x_5	y_5	Δy_5	$f(x_5, y_5)$	q_5			
x_6	y_6		$f(x_6, y_6)$				

Метод Адамса заключается в продолжении диагональной таблицы разностей с помощью формулы Адамса

$$\Delta y_i = q_i + \frac{1}{2} \Delta q_{i-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 q_{i-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 q_{i-3} \quad (3.1)$$

Полагая в формуле (3.1) $i=3$, вычисляем

$$\Delta y_3 = q_3 + \frac{1}{2} \Delta q_2 + \frac{5}{12} \Delta^2 q_1 + \frac{3}{8} \Delta^3 q_0. \text{ Найдя } \Delta y_3, \text{ вычисляем } y_4 = y_3 + \Delta y_3.$$

Зная x_4 и y_4 , находим $q_4 = h f(x_4, y_4)$ и вносим значения y_4 , Δy_3 и q_4 в таблицу разностей и пополняем её конечными разностями Δq_3 , $\Delta^2 q_2$, $\Delta^3 q_1$, расположенными вместе с q_4 по новой диагонали, параллельно прежней и т.д. Аналогично находится диагональ q_5 , Δq_4 , $\Delta^2 q_3$, $\Delta^3 q_2$. С помощью этой диагонали мы находим значение y_6 искомого решения $y(x)$.

II. ЗАДАНИЕ

Решить задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка

Таблица 1

№	Уравнение	Начальные условия
1	$y' = \frac{y+1}{x}$	$y=0$ при $x=0$
2	$2xy y' + x^2 - y^2 = 0$	$y=0$ при $x=1$
3	$e^{x-y} y' = 1$	$y=1$ при $x=1$
4	$y' \operatorname{ctg} x + y = 2$	$y=2$ при $x=0$
5	$e^y (y'+1) = 1$	$y=0$ при $x=0$
6	$y' + y = \cos x$	$y=0,5$ при $x=0$
7	$y' - 2y = -x^2$	$y=0,25$ при $x=0$
8	$y' + y = 2x$	$y=-1$ при $x=0$
9	$x y' = y$	$y=1$ при $x=1$
10	$2x y' = y$	$y=1$ при $x=1$
11	$2xy y' + x^2 - y^2 = 0$	$y=0$ при $x=0$
12	$x y' = y$	$y=0$ при $x=0$
13	$2x y' = y$	$y=0$ при $x=0$
14	$2xy y' + x^2 - y^2 = 0$	$y=1$ при $x=0$
15	$x y' + y - e^x = 0$	$y=1$ при $x=0$

III. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Решить задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка $y' - \frac{y}{1-x^2} - 1 - x = 0$, при заданных начальных условиях $y=0$ при $x=0$. Требуется на данном промежутке $0 \leq x \leq 1$ найти решение $y(x)$ уравнения $y' - \frac{y}{1-x^2} - 1 - x = 0$ с заданной степенью точности $\varepsilon=0,001$. Для этого выберем шаг вычислений $h = \frac{1-0}{6} = \frac{1}{6}$, деля отрезок $[0, 1]$ на 6 равных частей так, чтобы $h^4 < \varepsilon$ ($0,00077 < 0,001$). Точки деления отрезка определим по формуле $x_i = 0 + i \cdot 0,167$ ($i=0,1,2,3,\dots,6$). Соответствующие значения $y_i = y(x_i)$ искомой функции по методу Рунге-Кутты последовательно вычисляются по формулам: $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$, где $\Delta y_i = \frac{1}{6} (k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)})$, $i=0,1,2,\dots,6$,

$$k_1^{(i)} = f(x_i, y_i) \cdot h,$$

$$k_2^{(i)} = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right) \cdot h,$$

$$k_3^{(i)} = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right) \cdot h,$$

$$k_4^{(i)} = f(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}) \cdot h.$$

Применение программного продукта MathCad

$$f(x,y) := 1 + x + \frac{y}{1-x^2}$$

$$x_0 := 0 \quad y_0 := 0 \quad h := \frac{1}{6} \quad h = 0.167 \quad i := 0..6 \quad x_i := x_0 + i \cdot h$$

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.167 \\ 0.333 \\ 0.5 \\ 0.667 \\ 0.833 \\ 1 \end{pmatrix}$$

вычисляем коэффициенты:

$$k_1^{(i)} = f(x_i, y_i) \cdot h,$$

$$k_2^{(i)} = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right) \cdot h,$$

$$k_3^{(i)} = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right) \cdot h,$$

$$k_4^{(i)} = f(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}) \cdot h.$$

Для $i := 0$ найдём

$$k_1 := f(x_0, y_0) \cdot h \quad k_1 = 0.167$$

$$k_2 := f\left[\left(x_0 + \frac{h}{2}\right), y_0 + \frac{k_1}{2}\right] \cdot h \quad k_2 = 0.195$$

$$k_3 := f\left[\left(x_0 + \frac{h}{2}\right), y_0 + \frac{k_2}{2}\right] \cdot h \quad k_3 = 0.197$$

$$k_4 := f[(x_0 + h), y_0 + k_3] \cdot h \quad k_4 = 0.228$$

$$\text{Тогда } \Delta Y_0 := \frac{1}{6} \cdot (k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4) \quad \Delta Y_0 = 0.196$$

$$y_1 := y_0 + \Delta Y_0 \quad y_1 = 0.196$$

Для $i := 1$ найдём

$$k_1 := f(x_1, y_1) \cdot h \quad k_1 = 0.228$$

$$k_2 := f\left[\left(x_1 + \frac{h}{2}\right), y_1 + \frac{k_1}{2}\right] \cdot h \quad k_2 = 0.264$$

$$k_3 := f\left[\left(x_1 + \frac{h}{2}\right), y_1 + \frac{k_2}{2}\right] \cdot h \quad k_3 = 0.267$$

$$k_4 := f\left[(x_1 + h), y_1 + k_3\right] \cdot h \quad k_4 = 0.309$$

$$\text{Тогда } \Delta Y_1 := \frac{1}{6} \cdot (k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4) \quad \Delta Y_1 = 0.266$$

$$y_2 := y_1 + \Delta Y_1 \quad y_2 = 0.463$$

Для $i := 2$ найдём

$$k_1 := f(x_2, y_2) \cdot h \quad k_1 = 0.309$$

$$k_2 := f\left[\left(x_2 + \frac{h}{2}\right), y_2 + \frac{k_1}{2}\right] \cdot h \quad k_2 = 0.361$$

$$k_3 := f\left[\left(x_2 + \frac{h}{2}\right), y_2 + \frac{k_2}{2}\right] \cdot h \quad k_3 = 0.366$$

$$k_4 := f\left[\left(x_2 + h\right), y_2 + k_3\right] \cdot h \quad k_4 = 0.434$$

$$\text{Тогда } \Delta Y_2 := \frac{1}{6} \cdot (k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4) \quad \Delta Y_2 = 0.366$$

$$y_3 := y_2 + \Delta Y_2 \quad y_3 = 0.828$$

Для $i := 3$ найдём

$$k_1 := f(x_3, y_3) \cdot h \quad k_1 = 0.434$$

$$k_2 := f\left[\left(x_3 + \frac{h}{2}\right), y_3 + \frac{k_1}{2}\right] \cdot h \quad k_2 = 0.528$$

$$k_3 := f\left[\left(x_3 + \frac{h}{2}\right), y_3 + \frac{k_2}{2}\right] \cdot h \quad k_3 = 0.54$$

$$k_4 := f\left[\left(x_3 + h\right), y_3 + k_3\right] \cdot h \quad k_4 = 0.688$$

$$\text{Тогда } \Delta Y_3 := \frac{1}{6} \cdot (k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4) \quad \Delta Y_3 = 0.543$$

$$y_4 := y_3 + \Delta Y_3 \quad y_4 = 1.371$$

Для $i := 4$ найдём

$$k_1 := f(x_4, y_4) \cdot h \quad k_1 = 0.689$$

$$k_2 := f\left[\left(x_4 + \frac{h}{2}\right), y_4 + \frac{k_1}{2}\right] \cdot h \quad k_2 = 0.945$$

$$k_3 := f\left[\left(x_4 + \frac{h}{2}\right), y_4 + \frac{k_2}{2}\right] \cdot h \quad k_3 = 0.994$$

$$k_4 := f\left[(x_4 + h), y_4 + k_3\right] \cdot h \quad k_4 = 1.596$$

$$\text{Тогда } \Delta Y_4 := \frac{1}{6} \cdot (k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4) \quad \Delta Y_4 = 1.027$$

$$y_5 := y_4 + \Delta Y_4 \quad y_5 = 2.399$$

Для $i := 5$ найдём

$$k_1 := f(x_5, y_5) \cdot h \quad k_1 = 1.614$$

$$k_2 := f\left[\left(x_5 + \frac{h}{2}\right), y_5 + \frac{k_1}{2}\right] \cdot h \quad k_2 = 3.665$$

$$k_3 := f\left[\left(x_5 + \frac{h}{2}\right), y_5 + \frac{k_2}{2}\right] \cdot h \quad k_3 = 4.735$$

$$k_4 := f\left[(x_5 + h), y_5 + k_3\right] \cdot h \quad k_4 = 5.354 \times 10^{15}$$

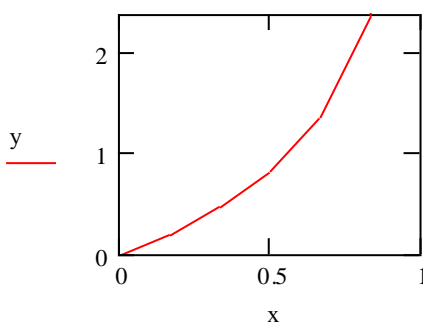
$$\text{Тогда } \Delta Y_5 := \frac{1}{6} \cdot (k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4) \quad \Delta Y_5 = 8.924 \times 10^{14}$$

$$y_6 := y_5 + \Delta Y_5 \quad y_6 = 8.924 \times 10^{14}$$

Окончательно имеем:

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.167 \\ 0.333 \\ 0.5 \\ 0.667 \\ 0.833 \\ 1 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.196 \\ 0.463 \\ 0.828 \\ 1.371 \\ 2.399 \\ 8.924 \times 10^{14} \end{pmatrix} \quad \Delta Y = \begin{pmatrix} 0.196 \\ 0.266 \\ 0.366 \\ 0.543 \\ 1.027 \\ 8.924 \times 10^{14} \end{pmatrix}$$

Построим график искомой функции на отрезке [0,1]



Для решения по методу Рунге-Кутты можно воспользоваться так же готовой программой в среде MathCad «Метод Рунге-Кутты», которая имеет следующий вид:

$$f(x,y) := \frac{y}{1-x^2} + 1 + x \quad a := 0 \quad b := 1 \quad x_0 := a \quad n := 6 \quad y_0 := c$$

$$h := \frac{b - x_0}{n} \quad h = 0.167 \quad i := 0..6 \quad x_i := x_0 + i \cdot h$$

```

M :=
  y_0 ← 0
  for i ∈ 0..5
    k_{i,1} ← f(x_i, y_i) · h
    k_{i,2} ← f(x_i + h/2, y_i + k_{i,1}/2) · h
    k_{i,3} ← f(x_i + h/2, y_i + k_{i,2}/2) · h
    k_{i,4} ← f(x_i + h, y_i + k_{i,3}) · h
    Δy_i ← 1/6 · (k_{i,1} + 2 · k_{i,2} + 2 · k_{i,3} + k_{i,4})
    y_{i+1} ← y_i + Δy_i
  M_1 ← k
  M_2 ← Δy
  M_3 ← y
  M

```

$k := M_1$ $\Delta y := M_2$ $y := M_3$

$$k = \begin{pmatrix} 0 & 0.167 & 0.195 & 0.197 & 0.228 \\ 0 & 0.228 & 0.264 & 0.267 & 0.309 \\ 0 & 0.309 & 0.361 & 0.366 & 0.434 \\ 0 & 0.434 & 0.528 & 0.54 & 0.688 \\ 0 & 0.689 & 0.945 & 0.994 & 1.596 \\ 0 & 1.614 & 3.665 & 4.735 & 5.354 \times 10^{15} \end{pmatrix}$$

$$\Delta y = \begin{pmatrix} 0.196 \\ 0.266 \\ 0.366 \\ 0.543 \\ 1.027 \\ 8.924 \times 10^{14} \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.196 \\ 0.463 \\ 0.828 \\ 1.371 \\ 2.399 \\ 8.924 \times 10^{14} \end{pmatrix}$$

Рассмотрим далее решение этой задачи по методу Адамса, исходя из начальных условий $y(0)=0$ мы запишем, найденные методом Рунге-Кутты, следующие три значения искомой функции $y(x)$:

$$y_0 = y(0) = 0, \quad y_1 = 0,196, \quad y_2 = 0,463, \quad y_3 = 0,828$$

Находим далее величины

$$\begin{aligned} q_0 &= h \cdot y'_0 = h \cdot f(x_0, y_0), & q_1 &= h \cdot y'_1 = h \cdot f(x_1, y_1), \\ q_2 &= h \cdot y'_2 = h \cdot f(x_2, y_2), & q_3 &= h \cdot y'_3 = h \cdot f(x_3, y_3). \end{aligned}$$

Используя программный продукт MathCad найдём

$$q_0 := h \cdot f(x_0, y_0) \quad q_0 = 0.167$$

$$q_1 := h \cdot f(x_1, y_1) \quad q_1 = 0.228$$

$$q_2 := h \cdot f(x_2, y_2) \quad q_2 = 0.309$$

$$q_3 := h \cdot f(x_3, y_3) \quad q_3 = 0.434$$

Составим диагональную таблицу конечных разностей значений q :

	x_n	y_n	$\Delta y_n =$ $= y_{n+1} - y_n$	$y'_n =$ $= f(x_n, y_n)$	$q_n =$ $= y'_n \cdot h$	$\Delta q_n =$ $= q_{n+1} - q_n$	$\Delta^2 q_n =$ $= \Delta q_{n+1} - \Delta q_n$	$\Delta^3 q_n =$ $= \Delta^2 q_{n+1} - \Delta^2 q_n$
0	0	0	0,196	1	0,167	0,061	0,02	0,24
1	0,167	0,196	0,266	1,365	0,228	0,081	0,044	
2	0,333	0,463	0,366	1,85	0,309	0,125		
3	0,5	0,828		2,598	0,434			
4	0,667							
5	0,833							
6	1							

Метод Адамса заключается в продолжении диагональной таблицы разностей с помощью формулы Адамса

$$\Delta y_i = q_i + \frac{1}{2} \Delta q_{i-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 q_{i-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 q_{i-3}$$

Используя программный продукт MathCad найдём

$$q_3 = 0.434 \quad \Delta q_2 := 0.434 \quad \Delta^2 q_1 := 0.044 \quad \Delta^3 q_0 := 0.2$$

$$\Delta y_3 := q_3 + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Delta q_2 + \left(\frac{5}{12}\right) \cdot \Delta^2 q_1 + \left(\frac{3}{8}\right) \cdot \Delta^3 q_0$$

$$\Delta y_3 = 0.759 \quad y_4 := y_3 + \Delta y_3 \quad y_4 = 1.588$$

$$q_4 := h \cdot f(x_4, y_4) \quad q_4 = 0.754$$

вносим значения $y_4=1,588$, $\Delta y_3=0,759$ и $q_4=0,754$ в таблицу разностей и пополняем её конечными разностями Δq_3 , $\Delta^2 q_2$, $\Delta^3 q_1$, расположенными вместе с q_4 по новой диагонали, параллельно прежней.

	x_n	y_n	$\Delta y_n =$ $= y_{n+1} - y_n$	$y'_n =$ $= f(x_n, y_n)$	$q_n =$ $= y'_n \cdot h$	$\Delta q_n =$ $= q_{n+1} - q_n$	$\Delta^2 q_n =$ $= \Delta q_{n+1} - \Delta q_n$	$\Delta^3 q_n =$ $= \Delta^2 q_{n+1} - \Delta^2 q_n$
0	0	0	0,196	1	0,167	0,061	0,02	0,24
1	0,167	0,196	0,266	1,365	0,228	0,081	0,044	0,151
2	0,333	0,463	0,366	1,85	0,309	0,125	0,195	
3	0,5	0,828	0,759	2,598	0,434	0,32		
4	0,667	1,588		4,515	0,754			
5	0,833							
6	1							

Аналогично находится диагональ q_5 , Δq_4 , $\Delta^2 q_3$, $\Delta^3 q_2$.

$$q_4 = 0.754 \quad \Delta q_3 := 0.32 \quad \Delta^2 q_2 := 0.195 \quad \Delta^3 q_1 := 0.151$$

$$\Delta y_4 := q_4 + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Delta q_3 + \left(\frac{5}{12}\right) \cdot \Delta^2 q_2 + \left(\frac{3}{8}\right) \cdot \Delta^3 q_1$$

$$\Delta y_4 = 1.052 \quad y_5 := y_4 + \Delta y_4 \quad y_5 = 2.64$$

$$q_5 := h \cdot f(x_5, y_5) \quad q_5 = 1.746$$

	x_n	y_n	$\Delta y_n =$ $= y_{n+1} - y_n$	$y'_n =$ $= f(x_n, y_n)$	$q_n =$ $= y'_n \cdot h$	$\Delta q_n =$ $= q_{n+1} - q_n$	$\Delta^2 q_n =$ $= \Delta q_{n+1} - \Delta q_n$	$\Delta^3 q_n =$ $= \Delta^2 q_{n+1} - \Delta^2 q_n$
0	0	0	0,196	1	0,167	0,061	0,02	0,24
1	0,167	0,196	0,266	1,365	0,228	0,081	0,044	0,151
2	0,333	0,463	0,366	1,85	0,309	0,125	0,195	0,531
3	0,5	0,828	0,759	2,598	0,434	0,32	0,682	
4	0,667	1,588	1,052	4,515	0,754	1,002		
5	0,833	2,64		10,515	1,756			
6	1							

С помощью этой диагонали мы находим значение y_6 искомого решения $y(x)$.

$$q_5 = 1.746 \quad \Delta q_4 := 1.002 \quad \Delta^2 q_3 := 0.682 \quad \Delta^3 q_2 := 0.53$$

$$\Delta y_5 := q_5 + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Delta q_4 + \left(\frac{5}{12}\right) \cdot \Delta^2 q_3 + \left(\frac{3}{8}\right) \cdot \Delta^3 q_2$$

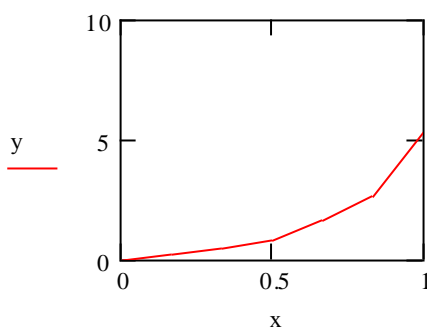
$$\Delta y_5 = 2.73 \quad y_6 := y_5 + \Delta y_5 \quad y_6 = 5.37$$

	x_n	y_n	$\Delta y_n =$ $= y_{n+1} - y_n$	$y'_n =$ $= f(x_n, y_n)$	$q_n =$ $= y'_n \cdot h$	$\Delta q_n =$ $= q_{n+1} - q_n$	$\Delta^2 q_n =$ $= \Delta q_{n+1} - \Delta q_n$	$\Delta^3 q_n =$ $= \Delta^2 q_{n+1} - \Delta^2 q_n$
0	0	0	0,196	1	0,167	0,061	0,02	0,24
1	0,167	0,196	0,266	1,365	0,228	0,081	0,044	0,151
2	0,333	0,463	0,366	1,85	0,309	0,125	0,195	0,531
3	0,5	0,828	0,759	2,598	0,434	0,32	0,682	
4	0,667	1,588	1,052	4,515	0,754	1,002		
5	0,833	2,64	2,73	10,515	1,756			
6	1	5,37						

Получили искомую функцию, заданную таблично.

x	0	0,167	0,333	0,5	0,667	0,833	1
y	0	0,196	0,463	0,828	1,588	2,64	5,37

Построим график искомой функции на отрезке $[0,1]$



IV. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называется дифференциальным уравнением?
2. Какое уравнение называется обыкновенным дифференциальным уравнением?
3. Какое уравнение называется линейным дифференциальным уравнением?
4. Определение частного и общего решения дифференциального уравнения.
5. Задача Коши.
6. Метод Рунге-Кутты.
7. Метод Адамса.

Библиографический список

1. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления [Текст] : учебное пособие. Т. 1 / Н. С. Пискунов. - изд., стер. - М. : Интеграл-Пресс, 2007. - 416 с. - ISBN 5-89602-012-0
4. Запорожец Г. И. Руководство к решению задач по математическому анализу [Текст] : учебное пособие / Григорий Иванович Запорожец. - 6-е изд., стер. - СПб. : Лань, 2010. - 464 с. : ил. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - ISBN 978-5-8114-0912-9