МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждения высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра информационной безопасности

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
_____________ О.Г. Локтионова
«[illegible]» [illegible] 2017г.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ И СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Методические рекомендации для практических занятий и самостоятельной работы
для студентов укрупненной группы специальностей и направлений подготовки 10.00.00 «Информационная безопасность»

Курск 2017

УДК 621.(076.1)

Составитель: М.О. Таныгин

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент кафедры
«Информационная безопасность» М.А. Ефремов

Математическое моделирование технических объектов и систем управления [Текст] : методические рекомендации для практических занятий и самостоятельной работы/ Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: М.О. Таныгин. – Курск, 2017. – 26 с.: ил. 2, табл. 1. – Библиогр.: с. 26.

Содержат сведения по вопросам работы с математическим моделированием технических объектов и систем управления. Указывается порядок выполнения практических и самостоятельных работ, правила оформления отчета.

Методические рекомендации соответствуют требованиям программы, утвержденной учебно-методическим объединением по специальности.

Предназначены для студентов укрупненной группы специальностей и направлений подготовки 10.00.00 «Информационная безопасность».

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать . Формат 60х84 1/16.
Усл.печ. л. 1,51. Уч.-изд. л. 1,37. Тираж 100 экз. Заказ. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

1 Описание случайного процесса с помощью аппарата цепей Маркова

1.1 Общие сведения о Марковских процессах

1.1.1 Термины и определения

Марковский процесс — случайный процесс, эволюция которого после любого заданного значения временного параметра не зависит от эволюции, предшествовавшей , при условии, что значение процесса в этот момент фиксировано («будущее» процесса не зависит от «прошлого» при известном «настоящем»; другая трактовка): «будущее» процесса зависит от «прошлого» лишь через «настоящее»).

Цепь Маркова — последовательность случайных событий с конечным или счётным числом исходов, характеризующаяся тем свойством, что, говоря нестрого, при фиксированном настоящем будущее независимо от прошлого.

Марковские процессы делятся на два класса:

– дискретные марковские процессы (марковские цепи);
– непрерывные марковские процессы.

1.1.2 Дискретные марковские процессов

Дискретная марковская цепь, дискретный марковский процесс - это случайный процесс, при котором смена дискретных состояний происходит в определенные моменты времени.

Непрерывный марковский процесс - это случайный процесс, при котором смена дискретных состояний происходит в случайные моменты времени.

Таким образом, любой марковский процесс на самом деле - дискретный процесс, но происходящий либо в дискретном времени (в искусственной числовой сетке времени), либо в непрерывном (физическом) времени.

Рассмотрим ситуацию, когда моделируемый процесс обладает следующими особенностями.

Система S имеет n возможных состояний: S_1, S_2, ..., S_n,. Вообще говоря, число состояний может быть бесконечным. Однако модель, как правило, строится для конечного числа состояний.

Смена состояний происходит, будем считать, мгновенно и в строго определенные моменты времени t_l, l= 1, 2,… . В дальнейшем будем называть временные точки t_l шагами.

Известны вероятности перехода p_{ij} системы за один шаг из состояния S_i в состояние S_j.

Цель моделирования: определить вероятности состояний системы после k-го шага. Обозначим эти вероятности $p_j(k)$, $j=1\ldots n$ (не путать с вероятностями p_{ij}).

Если в системе отсутствует последействие, то есть вероятности p_{ij} не зависят от предыстории нахождения системы в состоянии S_i , а определяются только этим состоянием, то описанная ситуация соответствует модели дискретной марковской цепи.

Марковская цепь называется **однородной**, если переходные вероятности p_{ij} от времени не зависят, то есть от шага к шагу не меняются. В противном случае, то есть если переходные вероятности $p_{ij}(t)$ зависят от времени, марковская цепь называется **неоднородной**.

Значения p_{ij} обычно сводятся в матрицу переходных вероятностей:

$$\|p_{ij}\| = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}, \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$$

Значения p_{ij} могут также указываться на графе состояний системы. На рис. 1 показан размеченный граф для четырех состояний системы. Обычно вероятности переходов "в себя" – p_{11} , p_{22} и т. д. на графе состояний можно не проставлять, так как их значения дополняют до 1 сумму переходных вероятностей, указанных на ребрах (стрелках), выходящих из данного состояния.

Математической моделью нахождения вероятностей состояний однородной марковской цепи является рекуррентная зависимость

$$p_j(k) = \sum_{i=1}^{n} p_i(k-1)p_{ij} \qquad (1)$$

где $p_j(k)$- вероятность j-го состояния системы после k-го шага, $j=1\ldots n$,

$p_i(k-1)$- вероятность i-го состояния системы после (k-1)-го шага, $i=1\ldots n$,

n - число состояний системы;

p_{ij}-переходные вероятности.

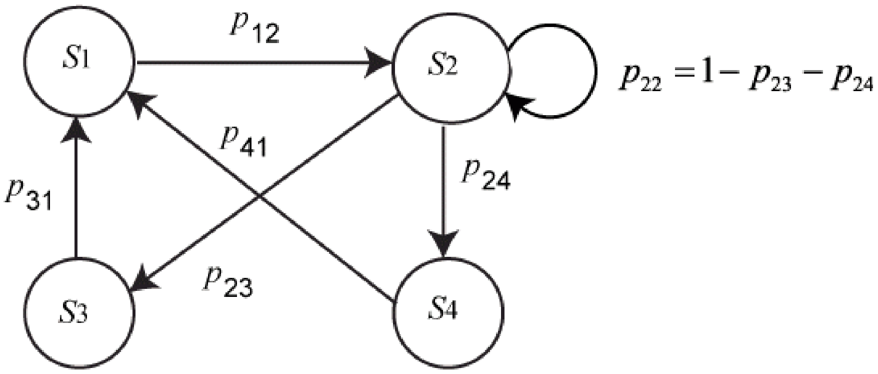

Рисунок 1. Размеченный граф состояний системы

Сформулируем методику моделирования по схеме дискретных марковских процессов (марковских цепей).

1. Зафиксировать исследуемое свойство системы. Определение свойства зависит от цели исследования. Например, если исследуется объект с целью получения характеристик надежности, то в качестве свойства следует выбрать исправность. Если исследуется загрузка системы, то - занятость..
2. Определить конечное число возможных состояний системы и убедиться в правомерности моделирования по схеме дискретных марковских процессов.
3. Составить и разметить граф состояний.
4. Определить начальное состояние.
5. По рекуррентной зависимости (1) определить искомые вероятности.

В рамках изложенной методики моделирования исчерпывающей характеристикой поведения системы является совокупность вероятностей $p_j(k)$.

Например, при нанесении ударов по объектам, которые могут перемещаться (танковая группировка, корабли и т. п.), последние будут принимать меры по рассредоточению средств или другому защитному маневру, вплоть до активного противодействия атакующей стороне. Очевидно, все эти меры приведут к уменьшению поражающих возможностей стороны, наносящей удары, т. е. к соответствующему изменению переходных вероятностей. Процесс становится неоднородным, то есть теряет свойство "марковости". Естественно, это ведет к тому, чтобы применять модели иных, высших иерархических типов, учитывающих обратные связи.

1.1.3 Марковские процессы с непрерывным временем

Для марковских процессов с непрерывным временем, когда переходы из одного состояния в другое возможны в любой момент времени, вероятность перехода из состояния E_i в состояние E_j точно в момент времени t не может быть задана, поскольку такая вероятность равна нулю. В случае марковской цепи с непрерывным временем для описания переходов используются не вероятности переходов, а интенсивности переходов. Интенсивность перехода из состояния E_i в состояние E_j в момент времени t, обозначаемая через $q_{ij}(t)$, определяется следующим образом:

$$q_{ij}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{ij}(t, t+\Delta t)}{\Delta t}, \qquad i \neq j; \qquad (2)$$

$$q_{ij}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{ij}(t, t+\Delta t) - 1}{\Delta t}, \qquad (3)$$

где $p_{ij}(t, t+\Delta t)$ – вероятность перехода из состояния i в состояние j в момент времени t за интервал времени Δt.

Эти пределы имеют следующую интерпретацию. Если в момент времени t процесс находится в состоянии E_i, то вероятность перехода в течение промежутка времени $(t, t\ \Delta t)$ в произвольное (отличное от E_i) состояние задается величиной $-q_{ii}(t)$ Δt. Таким образом, величину $-q_{ii}(t)$ можно интерпретировать как интенсивность, с которой процесс уходит из состояния E_i. Аналогично, вероятность перехода процесса в течение времени $(t, t\ \Delta t)$ из состояния E_i в состояние E_j задается величиной $q_{ij}(t)\Delta t$ и величину $q_{ij}(t)$ можно интерпретировать как интенсивность, с которой процесс переходит из состояния E_i в состояние E_j, при условии, что E_i - текущее состояние процесса. Так как всегда $\sum_{i=0}^{\infty} p_{ij}(t, t+\Delta t) = 1$, то из равенств (2) и (3) следует, что

$$\sum_{i=0}^{\infty} q_{ij}(t) = 0 \qquad (4)$$

Если вероятности переходов $p_{ij}(t, t+\Delta t)$, а, значит, и интенсивности переходов $q_{ij}(t)$, не зависят от времени, т.е. от того, в какой момент начинается промежуток Δt, то марковский процесс называется однородным, в противном случае - неоднородным.

Далее, рассматривая марковские случайные процессы с непрерывным временем, будем считать их однородными.

Интенсивности переходов q_{ij}, $i,j=0,n$, можно задать в виде квадратной матрицы **Q** размерности $(n+1)\times(n+1)$:

$$\begin{array}{ccccc} & E_0 & E_1 & \cdots & E_n \\ E_0 & q_{00} & q_{01} & \cdots & q_{0n} \\ E_1 & q_{10} & q_{11} & \cdots & q_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ E_n & q_{n0} & q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{array}$$

называемая матрицей интенсивностей переходов. Элементы матрицы переходов **Q** удовлетворяют условию (4) (сумма элементов строки равна нулю), и такая матрица называется дифференциальной.

Рассмотрим теперь задачу определения вероятностей марковского случайного процесса с непрерывным временем.

Вероятность того, что марковский процесс в момент времени $t+\Delta t$ окажется в состоянии E_i, определяется как

$$P_i(t+\Delta t) = \sum_{j=1}^{n} p_j(t) p_{ij}(t)\Delta t \qquad (5)$$

где $i=1...n$. Действительно, марковский процесс в момент времени $t+\Delta t$ окажется в состоянии E_i, если он в момент времени t находится в состоянии E_j (с вероятностью $P_j(t)$) и за промежуток времени Δt перейдет с вероятностью $p_{ji}(\Delta t)$ из состояния E_j в состояние E_i. Суммируя произведения вероятностей этих двух независимых событий по всем возможным состояниям процесса в момент времени t, получим равенство (5).

Если вычесть $P_i(t)$ от обоих сторон равенства (5), а затем разделить на Δt и определить соответствующие пределы при $\Delta t \to 0$, то получим:

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = \sum_{j=0}^{n} P_j(t) q_{ji} \qquad (6)$$

где i=0,n

Решая данную систему дифференциальных уравнений при заданном распределении $\mathbf{P}(0)=\{P_0(0),\ P_1(0),\ ...,\ P_n(0)\}$ начальных вероятностей можно определить вероятности $P_i(t)$, i=0,n, состояний марковского случайного процесса в любой момент времени.

В случае эргодичности марковского случайного процесса существуют предельные (при $t\rightarrow\infty$) вероятности состояний P_i, i=0,n, и они не зависят от начальных условий и временного параметра. Тогда производные $dP_i(t)/dt=0$, i=0,n, и система дифференциальных уравнений (6) для стационарного режима превращается в систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=0}^{n} P_j(t) q_{ji} = 0$$

, где i=0,n

или в векторном виде $\mathbf{PQ}$=0.

Последняя система совместно с нормировочным условием дает единственное решение для стационарных вероятностей P_i, i=0,n.

Систему уравнений для вероятностей состояний равновесия марковского процесса с непрерывным временем можно составить непосредственно по графу переходов, используя принцип равенства потоков вероятностей, который состоит в следующем: в состоянии равновесия марковского процесса поток вероятностей в любое состояние равен потоку вероятностей из этого состояния. При этом под потоком вероятностей, например, в данное состояние, понимается сумма произведений интенсивностей переходов в это состояние на вероятности тех состояний, откуда происходят эти переходы. Принцип равенства применим не только к потоку вероятностей для отдельных состояний, но и к потоку через любую замкнутую границу.

1.2 Задание на практическую работу

1)В соответствии с индивидуальным вариантом построить граф цепи Маркова для процесса с непрерывным временем (необходимо отбросить все дуги с нулевыми интенсивностями)

2)Записать систему линейных дифференциальных уравнений для вероятностей пребывания системы в каждом из состояний

Индивидуальный вариант

Марковский процесс задан графом из 7 вершин – состояний, соединённых дугами. Интенсивности переходов между состояниями заданы в таблице 1 (выбираются студентом в соответствии со своим вариантом). В таблице λ_{ij} – интенсивность перехода между состоянием i и j. Нулевые значения в таблице соответствуют отсутствию данной дуги в графе марковского процесса. Вектор начальных вероятностей P=(1,0,0,0,0,0,0) – система пребывает в состоянии 1.

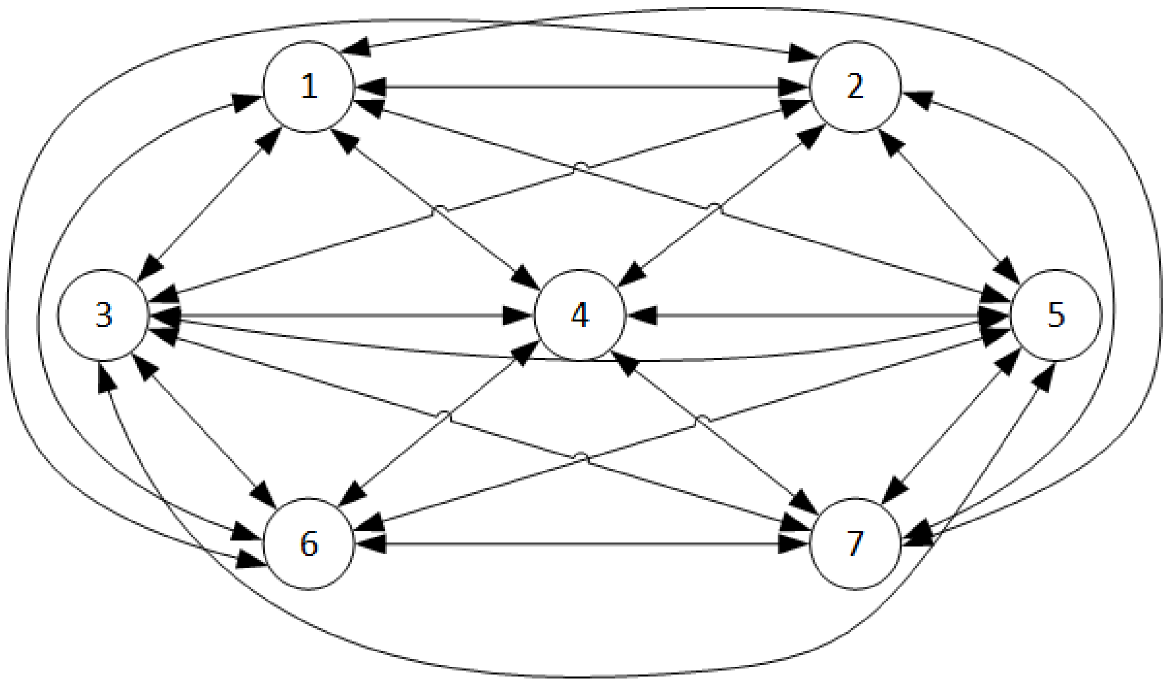

Рисунок 2 – Граф марковского процесса

Таблица 1- Интенсивности переходов между состояниями

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
λ_{12}	0	0	0,2	0	0	0	0	0	0,15	0	0	0,15
λ_{13}	0	0	0	0	0,3	0,05	0	0	0	0	0	0
λ_{14}	0	0	0	0	0,2	0	0	0,1	0	0	0	0
λ_{15}	0	0	0,05	0	0	0	0	0,15	0,05	0,1	0	0
λ_{16}	0	0	0	0,2	0,15	0,15	0,15	0	0	0	0	0

λ_{17}	0	0	0	0	0	0	0,25	0,25	0,3	0,15	0	0,15
λ_{21}	0	0,3	0,1	0,2	0	0	0,15	0	0	0	0,05	0
λ_{23}	0	0	0	0,3	0	0	0	0	0	0,3	0	0
λ_{24}	0,15	0,15	0	0	0,05	0	0	0	0,25	0,15	0	0,2
λ_{25}	0	0	0	0,15	0,15	0	0,3	0	0	0,3	0	0,05
λ_{26}	0	0	0	0,3	0	0	0	0	0	0	0	0,25
λ_{27}	0	0	0	0	0	0,25	0	0	0	0	0	0,3
λ_{31}	0,05	0	0	0	0	0,15	0	0,05	0	0	0	0,15
λ_{32}	0	0	0	0	0	0	0	0	0,25	0	0	0
λ_{34}	0,2	0	0	0	0	0	0,15	0	0	0	0,3	0,2
λ_{35}	0,2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,1
λ_{36}	0	0,05	0	0	0	0	0	0,15	0	0	0	0
λ_{37}	0,2	0,05	0,05	0	0	0	0,2	0	0	0	0	0
λ_{41}	0	0,05	0	0	0,25	0	0	0,2	0,1	0	0	0
λ_{42}	0,05	0,25	0	0	0	0	0	0	0,3	0	0	0
λ_{43}	0,05	0	0	0,1	0	0	0	0,15	0	0	0	0,3
λ_{45}	0	0,2	0	0,2	0,05	0,2	0	0	0	0,15	0	0,05
λ_{46}	0	0,15	0	0	0	0,2	0	0	0,15	0	0,15	0
λ_{47}	0	0	0	0	0	0	0	0	0,2	0	0,2	0
λ_{51}	0	0	0	0	0	0	0	0,3	0	0	0	0,1
λ_{52}	0,3	0	0	0	0,15	0,3	0	0,15	0,2	0	0	0
λ_{53}	0,15	0	0	0	0,25	0	0,25	0,2	0,05	0	0	0
λ_{54}	0	0	0	0	0	0	0	0,15	0	0,05	0	0,25
λ_{56}	0	0	0	0	0	0	0	0,3	0,1	0,15	0	0
λ_{57}	0	0	0	0	0	0,3	0	0	0,2	0	0	0
λ_{61}	0	0	0,3	0,15	0,15	0	0	0	0	0	0,1	0
λ_{62}	0,25	0	0	0,2	0	0	0	0	0	0	0	0
λ_{63}	0	0,1	0	0	0	0	0,25	0	0	0,15	0	0,05
λ_{64}	0	0,25	0	0,15	0,1	0	0	0	0	0	0,3	0,25
λ_{65}	0	0	0,2	0	0	0	0	0	0	0	0,15	0,1
λ_{67}	0	0	0	0,2	0	0	0	0	0	0	0	0
λ_{71}	0,25	0	0	0,25	0	0	0	0,15	0	0	0	0,3
λ_{72}	0	0	0,15	0	0,3	0	0,25	0	0	0	0,15	0,2
λ_{73}	0	0	0,1	0,15	0	0	0	0	0	0,15	0	0,05
λ_{74}	0	0	0	0	0	0,15	0	0,25	0	0	0	0
λ_{75}	0	0	0	0	0	0	0	0	0,15	0,1	0	0
λ_{76}	0	0	0,3	0	0,15	0	0	0	0	0	0	0

1.3 Рекомендации для самостоятельной работы

При изучении раздела «Задачи, объекты и процессы, подлежащие математическому моделированию» рассматривается использование аппарата марковских цепей для моделирования и получения численных характеристик случайных процессов, протекающих в информационных системах, каналах связи, а также для моделирования процессов возникновения – предотвращения угроз информационной безопасности. В последнем случае можно использовать отличительное свойство марковских процессов – отсутствие предыстории, которое можно толковать, как случайное возникновение угроз, случайное преодоление – непреодоление систем защиты, случайное причинение ущерба.

Опыт показывает, что использование марковских цепей позволяет получить адекватные численные характеристики функционирования информационных систем в условиях наличия угроз информационной безопасности, моделировать поведение нарушителя и работу систем защиты данных.

Основные положения теории случайных процессов и, в частности, марковских процессов, достаточные для технического специалиста и исследователя, изложены [1]. На наш взгляд материал, который изложен в данном источнике достаточен для проведения серьезных научных изысканий в области математического моделирования технических систем. Для более детального изучения свойств случайных процессов, их «марковости» следует обратиться к [2] и [3]. Если в результате изучения дисциплины, выполнения научно-исследовательской работы или выполнения технических расчётов потребуется изучение фундаментальных основ случайных процессов, то мы рекомендуем обратиться к [4] и [5].

1.4 Контрольные вопросы

1) Какое основное свойство марковского процесса?

2) Поясните на практическом примере независимость развития случайного процесса от предыстории

3) Для каких ситуаций подходит больше марковский процесс с дискретным временем, а для каких – с непрерывным?

4) Охарактеризуйте основные типы марковских процессов

5) Как происходит математическое описание марковского процесса?

1.5 Библиографический список

1)Вентцель, Е. С Теория случайных процессов и ее инженерные приложения [Текст] / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. - М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1991. - 384 с. - Б. ц.

2)Кельберт М. Я., Сухов Ю. М. Вероятность и статистика в примерах и задачах. Т. II: Марковские цепи как отправная точка теории случайных процессов и их приложения. — М.: МЦНМО, 2010. — 295 с. — ISBN 978-5-94057-252-7.

3)А.В.Булинский, А.Н.Ширяев. Теория случайных процессов. Физматлит, 2005.

4)Нуммелин Э., Общие неприводимые цепи Маркова и неотрицательные операторы. — М.: Мир, 1989. — 207 с

5)Марков А. А., Распространение закона больших чисел на величины, зависящие друг от друга. — Известия физико-математического общества при Казанском университете. — 2-я серия. — Том 15. (1906) — С. 135—156.

2 Решение систем линейных дифференциальных уравнений операторным методом

2.1 Теория

Операционный метод решения состоит в том, что мы считаем как искомую функцию *x(t),* так и правую часть *f(t)* оригиналами и переходим от уравнения *(1)* , связывающего оригиналы, к уравнению, связывающему их изображения *X(p)* и *F(p),* тогда *x(t)≑X(p),* а *f(t)≑F(p).* Воспользуемся теоремой о дифференцировании оригинала:

$$x'(t) \div pX(p) - x_0,$$

$$x''(t) \div p^2X(p) - px_0 - x'_0,$$

….

$$x^{(n)}(t) \div p^nX(p) - p^{n-1}x_0 - x_0^{(n-1)},$$

применяя свойство линейности получаем вместо уравнения *(1)* алгебраическое соотношение, которое назовем изображением, или операторным уравнением:

$$p^nX(p) - p^{n-1}x_0 - x_0^{(n-1)} + a_1\left(p^{n-1}X(p) - p^{n-2}x_0 - \cdots - x_0^{(n-2)}\right) + \cdots + a_{n-1}\left(p\quad X(p) - x_0\right) + a_nX(p) = F(p)$$

В результате мы получили уже не дифференциальное, а алгебраическое уравнение относительно неизвестного изображения $X(p)$.

$$Q_n(p)X(p) = F(p) + R_{n-1}(p)$$

где $Q_n(p) = p^n + a_1p^{n-1} + \cdots + a_{n-1}p \quad + a_n$,

$$R_{n-1}(p) = p^{n-1}x_0 + \cdots + x_0^{(n-1)} + a_1\left(p^{n-2}x_0 - \cdots - x_0^{(n-2)}\right) + \cdots + a_{n-1}x_0$$

$Q_n(p)$ и $R_{n-1}(p)$-алгебраические многочлены от p степени n и *n-1* соответственно.

Из последнего уравнения находим

$$X(p) = \frac{F(p) + R_{n-1}(p)}{Q_n(p)}$$

Полученное равенство называют операторным решением дифференциального уравнения *(1).* Остается по полученному изображению $X(p)$ найти оригинал $x(t)$, применяя для этого соответствующие правила операционного исчисления. Найденный оригинал $x(t)$ будет являться частным решением дифференциального уравнения

2.2 Пример

Решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами при условии выполнения начальных условий производится по той же схеме, что и решение уравнений:

1. Применяем к системе преобразование Лапласа и получаем операторную систему;

2. Решаем операторную систему и находим операторное решение;

3. Для операторного решения находим оригинал и получаем решение исходной дифференциальной системы (задачи Коши).

Найдём решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее начальным условиям :

$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 2x + y + 1 \end{cases}, \quad x(0) = 0, y(0) = 0$$

1. Применяем к системе дифференциальных уравнений преобразование Лапласа и получаем операторную систему:

$$\begin{cases} PX - X - 2Y = 0 \\ PX - 2X - Y = 1/p \end{cases}$$

2. Решаем операторную систему (например, по правилу Крамера) и находим операторное решение

$$\begin{cases} X = \dfrac{1}{p(p+1)(p-3)} \\ Y = \dfrac{p-1}{p(p+1)(p-3)} \end{cases}$$

Методом неопределенных коэффициентов находим разложения

$$\begin{cases} X = \dfrac{\frac{-2}{3}}{p} + \dfrac{\frac{1}{2}}{p+1} + \dfrac{\frac{1}{6}}{p-3} \\ X = \dfrac{\frac{1}{3}}{p} + \dfrac{\frac{-1}{2}}{p+1} + \dfrac{\frac{1}{6}}{p-3} \end{cases}$$

По изображениям X и Y находим оригиналы

$$\begin{cases} x = -\frac{2}{3} + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{3t} \\ y = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{3t} \end{cases}$$

2.3 Задание на практическую работу

1. Преобразовать систему дифференциальных уравнений, полученных в рамках выполнения предыдущей практической работы, к системе линейных с помощью операторного метода
2. Аналитически решить систему линейных полученных уравнений.
3. Получить решение системы линейных дифференциальных уравнений.
4. Построить графики зависимости функций вероятностей ЛДУ от параметра

2.4 Рекомендации для самостоятельной работы

Основное назначение операторного метода – это сведение процесса решения систем линейных дифференциальных уравнений к аналитическому решению систем линейных уравнений. Следует понимать ограниченность применимости данного метода – если решить аналитически систему линейных уравнений размерностью до 10 элементов ещё возможно, то для большего числа элементов это представляет собой достаточно трудоёмкое занятие. Для таких систем предпочтительными являются числены методы. Единственное исключение – большая разреженность или слабая связанность элементов, когда в матрице коэффициентов большую часть элементов составляют нули. Следует отметить, что в реальных системах это встречается достаточно часто.

К преимуществам операторного метода можно отнести возможность получения точного решения системы дифференциальных уравнений – получения точных формул зависимости функциональной величины от параметра. Кром того, в случа наличия решения, данный метод всегда сходится

Для инженеров и исследователей, перед которыми стоит задача описания моделируемой системы системой линейных операторных уравнений материал, изложенный в [1] и [2] нам представляется достаточным. В этих источниках изложены основные понятия операторного метода, основные формулы для свёртки функций и их обратного преобразования, основные методы, используемые для аналитического решения систем линейных уравнений

Для более глубокого изучения математического аппарата операторного исчисления мы рекомендуем обратиться к [3] и [4], в случае, если стоящие перед вами задачи математического описания реальных технических систем требуют серьёзной математической подготовки

2.5 Контрольные вопросы

1. Опишите общую схему решения линейных дифференциальных уравнений операционным методом.
2. Какие условия накладываются на системы, решаемые операционным методом?
3. Опишите проблемы, возникающие при решении систем дифференциальных уравнений операционным методом
4. Что такое «свёртка» функции?
5. Подходит ли операционный метод для решения нелинейных уравнений

2.6 Библиография

1) Араманович И.Г., Лунц Г.Л., Эльсгольц Л.Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. -М., Главная редакция физико-математической литературы, 1968 г., — стр. 416. — Избранные главы высшей математики для инженеров и студентов втузов. — 263—268 с.

2) Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Физматгиз, 1961. — 127—132 с.

3) Шостак Р.Я. Операционное исчисление. Краткий курс. Изд. второе, доп.Учебное пособие для вузов М. «Высшая школа», 1972 — 126—139 с.

4) Штокало И.З. Операционное исчисление (обобщения и приложения) Киев, Издательство «Наукова Думка», 1972 — 131—144 с.

3 Решение систем линейных дифференциальных уравнений численным методом

3.1 Краткая теория

Системой линейных дифференциальных уравнений называют систему вида

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{d\,x} = f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ \qquad\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

где x - независимый аргумент,

y_i - зависимая функция, $i = 1, \dots n$,

$y_i|_{x=x0} = y_{i0}$ - начальные условия.

Функции $y_i(x)$, при подстановке которой система уравнений обращается в тождество, называется решением системой дифференциальных уравнений.

Численные методы решения систем дифференциальных уравнений.

Метод Эйлера.

$y_{ij+1}=y_{ij}+hf_i(x_i,y_{1j}\ y_{2j}..y_{nj}),\ i = 1, \dots n$

j - номер шага.

$x_{j+1}=x_j+h$

Модифицированный метод Эйлера.

$k_{i1}=h*f_i(x_j,y_{1j}..y_{nj})$

$k_{i1}=h*f_i(x_j+h,y_{1j}+k_{i1}..y_{nj}+k_{i2})$

$y_{ij+1}=y_{ij}+(k_{i1}+k_{i2})/2$

$x_{j+1}=x_j+h$

Метод Рунге-Кутта четвертого порядка.

$k_{i1}=hf_i(x_j,y_{1j}..y_{nj})$

$k_{i2}=hf_i(x_j+h/2,y_{2j}+k_{i1}/2,..,y_{nj}+k_{n1}/2)$

$k_{i3}=hf_i(x_j+h/2,y_{2j}+k_{i2}/2,..,y_{nj}+k_{n2}/2)$

$k_{i4}=hf_i(x_j+h,y_{1j}+k_{i2},..,y_{nj}+k_{n3})$

$y_{ij+1}=y_{ij}+(k_{i1}+2k_{i2}+2k_{i3}+k_{i4})/6$

$x_{j+1}=x_j+h$

Пример реализации метода Эйлера на языке Паскаль

```
program Euler_Koshi;
var T:Text;
    x,h,a,b,y1,  y2,  y3,  y4,  y1_1,  y1_2,
```

```
y1_3,y1_4,
        y11, y12, y13, y14:real;
    function  F(x,  y1,  y2,  y3,  y4:  real;
n:byte):real;
    begin
        case n of
        1: f:=-y2;
        2: f:=y1;
        3: f:=y1-y4;
        4: f:=y2+y3;
        end;
    end;
    begin
        assign(T, 'd:\euler_k.txt');
        rewrite(T);
        a:=0; b:=2*pi; h:=pi/160;
        y1:=1; y2:=0; y3:=0; y4:=0;
        x:=a;
        while x<=b+h do
        begin
           writeln(T, x:10:5, y1:10:5, y2:10:5,
y3:10:5, y4:10:5,
           cos(x):10:5,             sin(x):10:5,
x*cos(x):10:5, x*sin(x):10:5);
           y1_1:=y1+h*f(x, y1, y2, y3, y4, 1);
           y1_2:=y2+h*f(x, y1, y2, y3, y4, 2);
           y1_3:=y3+h*f(x, y1, y2, y3, y4, 3);
           y1_4:=y4+h*f(x, y1, y2, y3, y4, 4);
           y11:=y1+h/2*(f(x,  y1,  y2,  y3,  y4,
1)+f(x+h,y1_1, y1_2, y1_3, y1_4, 1));
           y12:=y2+h/2*(f(x,  y1,  y2,  y3,  y4,
2)+f(x+h,y1_1, y1_2, y1_3, y1_4, 2));
           y13:=y3+h/2*(f(x,  y1,  y2,  y3,  y4,
3)+f(x+h,y1_1, y1_2, y1_3, y1_4, 3));
           y14:=y4+h/2*(f(x,  y1,  y2,  y3,  y4,
4)+f(x+h,y1_1, y1_2, y1_3, y1_4, 4));
           y1:=y11; y2:=y12; y3:=y13; y4:=y14;
           x:=x+h;
```

```
    end;
    flush(T); close(T);
end.
```

3.2 Задание на практическую работу

1. В соответствии с индивидуальным вариантом выбрать численный метод решения системы линейных дифференциальных уравнений

Решить численно систему линейных дифференциальных уравнений, полученных в рамках выполнения первой практической работы

Индивидуальные варианты

Вариант	Численный метод решения системы ЛДУ
1.	Метод Эйлера
2.	Модифицированный метод Эйлера
3.	Метод Рунге-Кутты
4.	Метод Эйлера
5.	Модифицированный метод Эйлера
6.	Метод Рунге-Кутты
7.	Метод Эйлера
8.	Модифицированный метод Эйлера
9.	Метод Рунге-Кутты
10.	Метод Эйлера
11.	Модифицированный метод Эйлера
12.	Метод Рунге-Кутты

3.3 Рекомендации для самостоятельной работы

Численные методы разрешения линейных дифференциальных уравнений являются наиболее популярным средством получения численных результатов математического моделирования. При изучении данного раздела следует особое внимание уделить выбору метода. Методы Эйлера являются более простыми в программной реализации, но обладают меньшим порядком точности. Соответственно, требуют меньшего шага интегрирования и большего числа итераций. На практике это может вылиться даже в большие затраты машинного времени, чем при использовании сложного метода Рунге-Кутты. Поэтому при выборе метода следует учесть ряд факторов:

Размер исчисляемой системы уравнений. Чем он больше, тем сложнее реализовывать двухэтапные методы.

Необходимая точность. Для получения результатов с высокой точностью простые методы могут быть совершенно непригодны, так как не позволят получить приемлемый результат даже при очень малом шаге интегрирования. Кроме того, не стоит забывать, что каждая итерация в численном методе создаёт ошибки вычислений, поэтому, чем меньше вычислений мы выполняем, тем достовернее результат

Связность элементов системы. Чем она выше, тем опять же более трудоёмок будет процесс получения результата.

Необходимость модифицировать математическую модель. При использовании сложных численных методов зачастую при составлении программы расчета учитывают структуру матрицы коэффициентов (например, неполную связность элементов, чтобы исключить многочисленные умножения на ноль). Но это ведёт к невозможности использовать разработанный алгоритм для матриц иной структуры, которые могут получиться в результате необходимости изменить математическую модель.

При изучении литературы, наиболее предпочтительны для инженера или исследователя книги [1-5]. В них описаны основные численные методы разрешения математических уравнений, описаны условия применения тех или иных методов. Для более детального изучения используемых в расчетах численных методов используйте литературу [6-11]. Особое внимание заслуживают вопросы практической реализации алгоритмов численного решения дифференциальных уравнений, рассмотренные в [9, 10]

3.4 Контрольные вопросы

1)Что такое сходимость численного метода?

2)Как растёт сложность метода Эйлера с ростом числа переменных в линейном дифференциальном уравнении?

3)Что такое порядок точности?

4)Сравните вычислительную сложность методов Эйлера и Рунге-Кутты

5)Какие свойства моделируемой системы могут повлиять на выбор численного метода разрешения ситсемы линейных дифференциальных уравнений?

3.5 Библиографический список

1) Бахвалов, Н. С. Численные методы. – М.: Наука, 1973. – 632 с.

2) Бабенко, К. И. Основы численного анализа. – М.: Наука, 1986. – 744 с.

3) Годунов, С. К. Разностные схемы / С. К. Годунов, В. С. Рябенький. – М.: Наука, 1977. – 400 с.

4) Бахвалов, Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – М.: Наука, 1987. – 600 с.

5) Самарский, А. А. Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М.: Наука, 1989. – 432 с.

6) Амосов, А. А. Вычислительные методы для инженеров / А. А. Амосов, Ю. А. Дубинский, Н. В. Копченова. – М.: Высшая школа, 1994. – 544 с. 7. Калиткин, Н. Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 512 с.

7) Волков, Е. А. Численные методы. – М.: Наука, 1982. – 248 с.

8) Турчак, Л. И. Основы численных методов. – М.: Наука, 1987. – 320 с.

9) Арушанян, О. Б. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фортране / О. Б. Арушанян, С. Ф. Залеткин. – М.: МГУ, 1990 – 336 с.

10) Мак-Кракен, Д. Численные методы и программирование на Фортране / Д. Мак-Кракен, У. Дорн. – М.: Мир, 1977. – 584 с.

11) Вержбицкий, В. М. Численные методы (математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения): учебн. пос. для вузов. – М.: Высш. шк., 2001. – 382 с. 13

4 Анализ точности вычислений

4.1 Краткая теория

Погрешность решения задачи обуславливается следующими причинами:

1) математическое описание задачи является неточным, в частности неточно заданы исходные данные описания;

2) применяемый для решения метод часто не является точным: получение точного решения возникающей математической задачи требует неограниченного или неприемлемо большого числа арифметических операций; поэтому вместо точного решения задачи приходится прибегать к приближенному;

3) при вводе данных в машину, при выполнении арифметических операций и при выводе данных производятся округления.

Погрешности, соответствующие этим причинам, называют:

1) неустранимой погрешностью,

2) погрешностью метода,

3) вычислительной погрешностью.

Часто неустранимую погрешность подразделяют на две части:

а) неустранимой погрешностью называют лишь погрешность, являющуюся следствием неточности задания числовых данных, входящих в математическое описание задачи;

б) погрешность, являющуюся следствием несоответствия математического описания задачи реальности, называют, соответственно, погрешностью математической модели.

Для оценки точности вычислений используют два вида погрешностей – абсолютную и относительную. **Абсолютной погрешностью** приближенного решения Δa^* называют модуль разности между точным и приближенным значениями $\Delta a^* = |a - a^*|$:

Как видно, из величины абсолютной погрешности невозможно определить качество приближения. Для определения качества приближения вводят **относительную погрешность** (при $a \neq 0$) в виде $\delta a^* = |a - a^*| / |a|$

Анализ погрешностей на численные вычисления описан во многих специализированных трудах и справочниках. Ограничимся только некоторыми правилами обработки приближенных данных.

При суммировании приближенных чисел одного знака потери точности не происходит, а при вычитании приближенных чисел одного знака ошибка возрастает в несколько раз и возможна существенная потеря точности. Например, если числа a и b близки настолько, что $|a + b| >> |a - b|$, не исключена полная или почти полная потеря точности. Таким образом, при построении численного метода следует избегать вычитания близких чисел. Если такое вычитание неизбежно, то необходимо учитывать потерю точности.

Анализируя погрешности, следует сказать и о неточностях вычислений на ЭВМ, вносимых машинной арифметикой. Следует отметить две их причины. Первая – ЭВМ работает в двоичном (или кратном двоичному) коде. Вторая – конечное количество разрядов, используемых для записи чисел. Первая особенность приводит к тому, что такое достаточно простое число в двоичном коде будет иметь вид периодической дроби. Вторая особенность проявляется в том, что при умножении значительного количества чисел больших единицы, происходит переполнение разрядов (машинная бесконечность), а меньших единицы – исчезновение порядка (машинный нуль).

Другим источником погрешностей является то, что часто решение дифференциального уравнения отыскивается на большом промежутке. Тогда в полученные оценки погрешности входит как множитель очень большое число. При этом может оказаться, что достижение нужной точности требует столь мелких шагов и столь малой величины вычислительной погрешности на шаге, что использование рассматриваемого метода будет нецелесообразно. Поэтому характеристика методов по признаку — сходится ли приближенное решение к точному при измельчении шага и при достаточно быстром уменьшении вычислительной погрешности или не сходится — является еще недостаточной

Формально эта оценка не зависит от длины промежутка интегрирования X, однако длина промежутка интегрирования может неявно влиять на значение коэффициента через оценки производных.

Наличие оценки погрешности, не ухудшающейся с увеличением промежутка интегрирования, позволяет использовать такие методы для отыскания, например, устойчивых решений дифференциальных уравнений путем установления. Начинаем численное интегрирование с произвольных начальных данных и с течением времени выходим на устойчивое решение. Этот прием часто употребляется при отыскании устойчивых предельных циклов систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

В связи с полученной оценкой погрешности и возможностью получения аналогичной оценки для случая численного решения задачи Коши для систем дифференциальных уравнений с быстро сближающимися решениями одношаговые методы находят широкое применение в вычислительной практике. В то же время методы, для которых в подобной ситуации погрешность растет неограниченно, практически исчезли из употребления. Заметим, что в случае в соответствии с утверждением леммы решения расходятся с экспоненциальной скоростью, и поэтому погрешность любого метода должна неограниченно расти.

Другим достоинством одношаговых методов является удобство изменения шага интегрирования и однотипность вычислений во всех расчетных точках (у конкурирующих с ними методов Адамса изменение шага интегрирования и начало вычислений производятся с помощью некоторых специальных громоздких формул).

4.2 Задание на практическую работу

1)Получить решения системы линейных дифференциальных уравнений численным методом в соответствии с практической работой №3

2)Сравнить полученный результат полученным аналитически точным решением. Найти относительную погрешность и интервал наибольшего отклонения от точного значения

3)Проделать то же самое для вдвое, втрое, вчетверо меньшего шага интегрирования. Сравнить результаты

4)Сравнить временные затраты на решение с различными шагами интегрирования

4.3 Рекомендации для самостоятельной работы

При изучении проблемы точности результатов вычислений необходимо отталкиваться от свойств исчисляемой математической модели и свойств выбранного метода. Прежде всего, можно проверить возникновение погрешностей на небольшой модели, попытавшись минимизировать в ней выполнение арифметических операций и сравнив полученные результаты.

Следует помнить, что ошибки численного решения систем линейных дифференциальных уравнений заложены в самом выбранном методе численного решения и не могут быть полностью устранены. Большое влияние на размер ошибки оказывает выбранный шаг интегрирования, в чём студент может убедиться самостоятельно, выполняя практическую работу. Важным моментом при самостоятельной работе является формирования у обучающегося представления о взаимосвязи временных затрат на численное разрешение модели и точности получаемого результата. Нахождение оптимума между временными задержками и точностью – умение, которое формируется при практическом решении задач математического моделирования. Для обучающегося важно помнить, что если повышение точности на 5% привело к росту затрат временных ресурсов на 100%, то это в принципе может сделать использование численных методов неприемлемым, так как сложность реальных задач исчисляется часами и даже днями машинного времени.

Для самостоятельного изучения проблемы точности результатов вычислений рекомендуется обратиться к литературе [1-3]. В ней приведены основные формулы для оценки погрешностей каждого метода, приведена их зависимость от шага интегрирования. Если сведений в указанных источниках будет недостаточно, тогда можно обратиться к [4-8], которые могут быть полезны для анализа редких ситуаций со сходимостью результатов, ситуаций, связанных с «биением» решения, когда с уменьшением шага абсолютная погрешность не меняется в абсолютном значении, меняя лишь знак

4.4 Контрольные вопросы

1)Какие существуют причины возникновения ошибок численного разрешения математических моделей?

2)Как влияет шаг интегрирования на ошибки численного разрешения?

3)Какие методы можно использовать для минимизации погрешностей расчета?

4)Всегда ли уменьшение шага исчисления ведёт к повышению точности?

5)Влияет ли на погрешность интервал, на котором решается система линейных дифференциальных уравнений

4.5 Библиографический список

1) Математическое программирование: учеб. пособие для студентов вузов [Текст] / В. Г. Карманов - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2008 .- 264 с. (Кол-во экз.:2)

2) Математическое моделирование: Идеи, методы, примеры [Текст] / А.А.Самарский, А.П.Михайлов - М. :ФИЗМАТЛИТ, 2005 .- 320с.

3) Математические модели и численные методы в задачах экологического мониторинга атмосферы [Текст] / В. И. Наац, И. Э. Наац. - М.: Физматлит, 2010. - 328 с.

4) Введение в математическое моделирование [Текст] / В.Н. Ашихмин, М.Б. Гитман, Ч.Э. Келлер и др.; под ред. В.П. Трусова. – М.: Логос, 2004. – 440 с.

5)Краснощеков, П. С. Принципы построения моделей / П. С. Краснощеков, А. А. Петров. – М.: МГУ, 1983. – 216 с.

6)Крылов, В. И. Вычислительные методы. Т. 2 / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырский. – М.: Наука, 1977. – 400 с.

7)Хейгеман, Л. Прикладные итерационные методы / Л. Хейгеман, Д. Янг. – М.: Мир, 1986. – 446 с.

8)Григолюк, Э. И. Метод Бубнова. – М.: НИИ механики МГУ, 1996. – 58 с.